

*Nothing takes place in the world whose meaning is not that of some maximum or minimum.*

— Leonhard Euler —

# 10

## Functie-onderzoek

Onze studie van limieten leidde tot continue functies, een zekere klasse van functies die zich bijzonder 'braaf' gedragen. Vervolgens gaven limieten ons nog een 'bravere' klasse van functies, functies die afleidbaar zijn.

Dit hoofdstuk verkent enkele manieren waarop we kunnen gebruikmaken van de informatie die continue en afleidbare functies ons kunnen verschaffen.

### 10.1 Extrema

Gegeven een grootte beschreven door een functie, zijn we vaak geïnteresseerd in de grootste en/of kleinste waarden die de grootte kan aannemen. Als de functie bijvoorbeeld de snelheid van een voorwerp beschrijft, lijkt het redelijk dat we willen weten wat het snelste/tragste is dat het voorwerp beweegt. We noemen dergelijke waarden **extrema** (*extreme values*).

#### Definitie 10.1 (Extrema)

Zij  $f$  gedefinieerd over een interval  $I$  dat  $c$  bevat, dan is

1.  $f(c)$  een (absoluut) **minimum** (*minimum*) van  $f$  op  $I$  als  $\forall x \in I: f(c) \leq f(x)$ .
2.  $f(c)$  een (absoluut) **maximum** (*maximum*) van  $f$  op  $I$  als  $\forall x \in I: f(c) \geq f(x)$ .

De maxima en minima zijn de **extrema** (*extremum*) van  $f$  op  $I$ .

We kunnen ook lokale minima en maxima definiëren, wat begrepen kan worden als de kleinste en grootste  $y$ -waarde in de buurt. We maken deze intuïtie formeel in de volgende definitie.

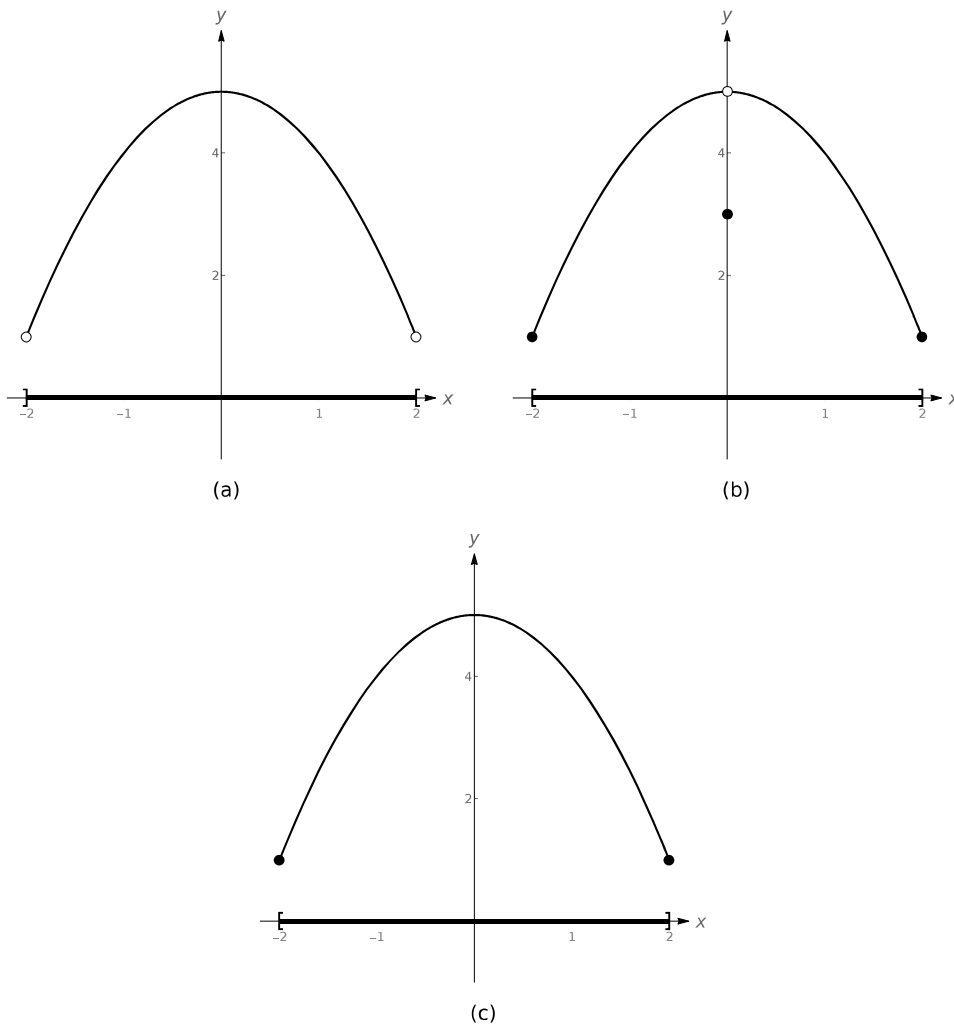
**Definitie 10.2 (Lokaal minimum en lokaal maximum)**

Zij  $f$  gedefinieerd over een interval  $I$  dat  $c$  bevat, en als er dan een  $\delta > 0$  bestaat zodat

1.  $f(c) \leq f(x)$  voor alle  $x$  in  $I$  indien  $|x - c| < \delta$ , dan is  $f(c)$  een **lokaal minimum** (*relative minimum*) van  $f$ . We zeggen ook dat  $f$  een lokaal minimum heeft in  $(c, f(c))$ .
2.  $f(c) \geq f(x)$  voor alle  $x$  in  $I$  indien  $|x - c| < \delta$ , dan is  $f(c)$  een **lokaal maximum** (*relative maximum*) van  $f$ . We zeggen ook dat  $f$  een lokaal maximum heeft in  $(c, f(c))$ .

De lokale minima en maxima vormen de **lokale extrema** (*relative extremum*) van  $f$ .

De functie weergegeven in Figuur 10.1(a) heeft een maximum, maar geen minimum, aangezien de functie over een open interval gedefinieerd is. In Figuur 10.1(b) heeft de functie een minimum, maar geen maximum want er is een discontinuïteit op de plaats waar we het maximum zouden verwachten. De functie in Figuur 10.1(c) heeft zowel een maximum als een minimum. Merk op dat dit een continue functie is gedefinieerd over een gesloten interval.



**Figuur 10.1:** Grafieken van functies met en zonder minima/maxima.

**Stelling 10.1 (Extremumstelling)**

*Zij  $f$  een continue functie gedefinieerd over een gesloten interval  $I$ , dan heeft  $f$  zowel een minimum als maximum op  $I$ .*

**Bewijs** De verzameling  $\{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in [a, b]\}$  is een begrensde verzameling. Dus er bestaat een supremum wegens de supremumeigenschap voor reële getallen. Laat  $M$  dit supremum zijn, d.i.  $M = \sup(f(x))$  op  $[a, b]$ . Als er geen punt  $x$  in  $[a, b]$  is met  $f(x) = M$ , dan  $f(x) < M$  over  $[a, b]$ . Bijgevolg is

$$\frac{1}{M-f(x)}$$

continu over  $[a, b]$ .

Voor elk positief getal  $\epsilon$  bestaat er echter een  $x$  in  $[a, b]$  zo dat  $M-f(x) < \epsilon$ , omdat  $M$  het supremum is. Dus,

$$\frac{1}{M-f(x)} > \frac{1}{\epsilon},$$

wat betekent dat  $1/(M-f(x))$  niet begrensd is. Aangezien elke continue functie op een interval  $[a, b]$  begrensd is (Stelling 8.9), is dit in tegenspraak met de conclusie dat  $1/(M-f(x))$  continu is over  $[a, b]$ . Daarom, moet er een punt  $x$  in  $[a, b]$  bestaan met  $f(x) = M$ . Bijgevolg bereikt de functie  $f$  zijn maximum in een punt van het interval  $[a, b]$ .

Een analoge redenering geldt voor het minimum. □

Deze stelling stelt dat  $f$  extrema heeft, maar zegt niets over hoe en waar we deze kunnen vinden. Het volgende voorbeeld illustreert dat dit proces vrij eenvoudig kan zijn. Verder zullen we uit dit voorbeeld lessen trekken om een algemenere methode te ontwikkelen om extrema te vinden.

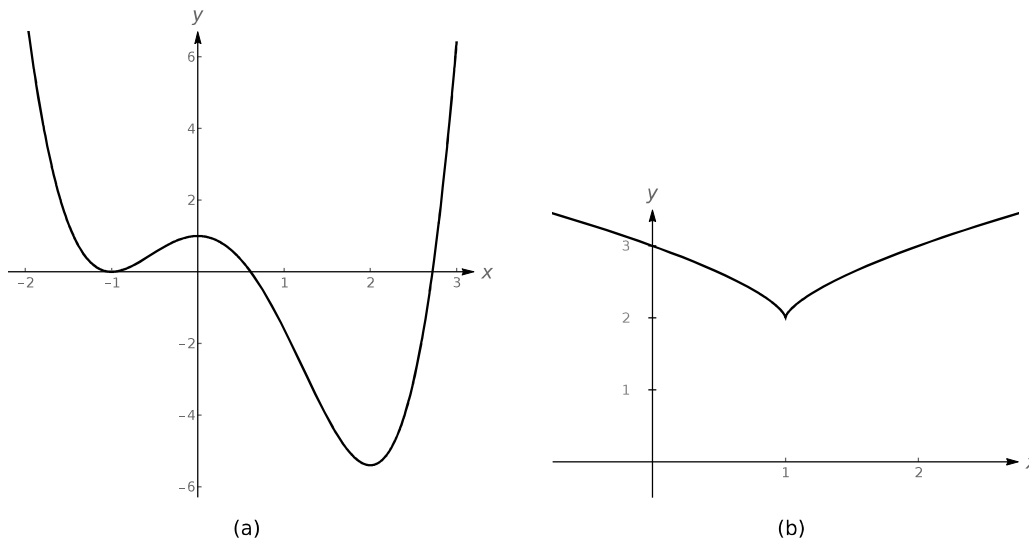
**Voorbeeld 10.1**

Beschouw de functies met voorschriften

$$1. f(x) = \frac{3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5}{5},$$

$$2. g(x) = (x-1)^{2/3} + 2,$$

die respectievelijk weergegeven worden in Figuur 10.2(a) en 10.2(b). Schat de lokale extrema van deze functies. Evalueer de eerste-orde afgeleide in elk van deze punten.



**Figuur 10.2:** De grafiek van  $f(x) = (3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5)/5$  (a) en  $g(x) = (x - 1)^{2/3} + 2$  (b).

### Oplossing

We beschikken nog niet over de middelen om lokale extrema exact te bepalen, maar de grafieken laten ons wel toe om redelijke schattingen te maken.

1. Het lijkt erop dat  $f$  lokale minima heeft in  $x = -1$  en  $x = 2$ , met functiewaarden van  $f(-1) = 0$  en  $f(2) = -5.4$ . Het lijkt er ook op dat  $f$  een lokaal maximum heeft in  $(0, 1)$ . We schatten de lokale minima dus op 0 en  $-5.4$  en het lokaal maximum op 1. Evaluatie van  $f'(x) = (12x^3 - 12x^2 - 24x)/5$  in  $x = 0, -1$  en  $2$  levert steeds  $f'(x) = 0$  op.
2. Figuur 10.2(b) impliceert dat  $g$  geen lokale maxima heeft, maar wel een lokaal minimum in  $(1, 2)$ . De grafiek suggereert dat dit punt niet enkel een lokaal minimum is, maar dat  $y = g(1) = 2$  een absoluut minimum van de functie is. We berekenen  $g'(x) = 2/3(x - 1)^{-1/3}$  en merken op dat wanneer  $x = 1$  is,  $g'$  niet gedefinieerd is.

Wat kunnen we leren uit de vorige twee voorbeelden? We konden visueel de lokale extrema schatten en in elk dergelijk punt was de afgeleide ofwel 0 ofwel niet gedefinieerd. Deze vaststelling geldt voor alle functies, wat leidt tot de volgende definities en stellingen.

#### Definitie 10.3 (Kritieke waarden en kritische punten)

Zij  $f$  gedefinieerd in  $c$ . De waarde  $c$  is een **kritieke waarde** (*critical number* of *critical value*) van  $f$  als  $f'(c) = 0$ .

Als  $c$  een kritieke waarde is van  $f$ , dan is het punt  $(c, f(c))$  een **kritisch punt** (*critical point*) van  $f$ .

#### Definitie 10.4 (Singulariteiten en singuliere punten)

Zij  $f$  gedefinieerd in  $c$ . De functie  $f$  heeft een **singulariteit** (*singularity*) in  $x = c$  als  $f'(c)$  niet gedefinieerd is. Het punt  $(c, f(c))$  wordt een **singulier punt** (*singular point*) genoemd.

**Stelling 10.2 (Lokale extrema en kritische punten)**

*Zij  $f$  een functie die gedefinieerd is over een open interval  $I$  dat  $c$  bevat en  $f$  heeft een lokaal extremum in het punt  $(c, f(c))$ , dan is  $(c, f(c))$  een kritisch of singulier punt van  $f$ .*

Indien de functie  $f$  ook afleidbaar is over een open interval  $I$  dat  $c$  bevat, herformuleren we Stelling 10.2 als volgt.

**Stelling 10.3 (De stelling van Fermat)**

*Zij  $f$  een functie die gedefinieerd en afleidbaar is over een open interval  $I$  dat  $c$  bevat en heeft  $f$  een lokaal extremum in het punt  $(c, f(c))$ , dan is  $f'(c) = 0$ .*

**Bewijs** Neem aan dat er in  $x_0$  een lokaal maximum is. We bewijzen dan dat de afgeleide 0 is. (Een gelijkaardig bewijs geldt als er in  $x_0$  een lokaal minimum is.) Dan bestaat er een  $\delta > 0$  waarvoor  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \subset I$  en waarvoor  $f(x_0) \geq f(x)$  voor alle  $x$  met  $|x - x_0| < \delta$ . Dus voor elke  $h \in ]0, \delta[$  geldt het volgende

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Als  $h$  naar 0 nadert, bestaat de limiet van deze breuk en is deze gelijk aan  $f'(x_0)$ . Daaruit volgt dat  $f'(x_0) \leq 0$ . Anderzijds merken we voor  $h \in ]-\delta, 0[$  op dat

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

maar opnieuw bestaat de limiet wanneer  $h$  naar 0 nadert en is deze gelijk aan  $f'(x_0)$ , dus er geldt ook dat  $f'(x_0) \geq 0$ .

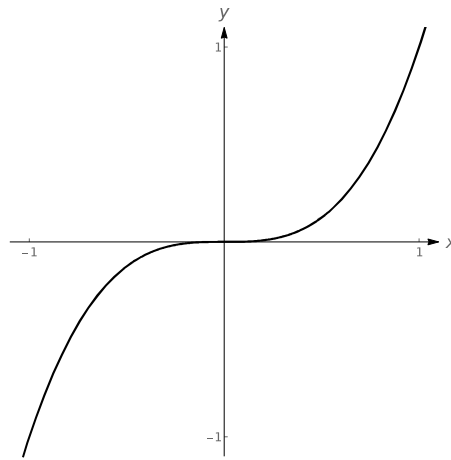
Bijgevolg kunnen we concluderen dat  $f'(x_0) = 0$ . □

Let op bij de interpretatie van Stelling 10.2. Deze stelling stelt namelijk dat lokale extrema op een open interval enkel voorkomen in kritische of singuliere punten, maar zegt niet dat elk dergelijk punt een lokaal extremum is. Beschouw bijvoorbeeld de functie met voorschrift  $f(x) = x^3$ . Aangezien  $f'(x) = 3x^2$ , is het meteen duidelijk dat  $x = 0$  een kritieke waarde van  $f$  is. De functie  $f$  heeft echter geen lokale extrema, zoals geïllustreerd in Figuur 10.3.

Stelling 10.1 stelt dat een continue functie over een gesloten interval steeds zowel een absoluut maximum als een absoluut minimum heeft. Deze extrema liggen ofwel in de eindpunten van het interval ofwel tussen die eindpunten. Het is gemakkelijk om de eindpunten te controleren op extrema, maar ertussen liggen oneindig veel punten die zouden gecontroleerd moeten worden. Bovenstaande theorie vertelt ons echter dat we enkel in de kritische en singuliere punten van die tussenliggende punten moeten nagaan of de bijbehorende functiewaarden extremaal zijn. Dit leidt tot de volgende procedure:

1. Evalueer  $f$  in de eindpunten  $a$  en  $b$  van het interval.
2. Bepaal de kritieke waarden en singulariteiten van  $f$  op  $[a, b]$ .
3. Evalueer  $f$  in elke kritieke waarde en singulariteit.
4. Het absolute maximum van  $f$  is de grootste van deze waarden en het absolute minimum van  $f$  is de kleinste van deze waarden.

We gebruiken deze strategie in de volgende voorbeelden.



**Figuur 10.3:** De grafiek van  $f(x) = x^3$ , die een kritieke waarde heeft in  $x = 0$ , maar geen lokale extrema heeft.

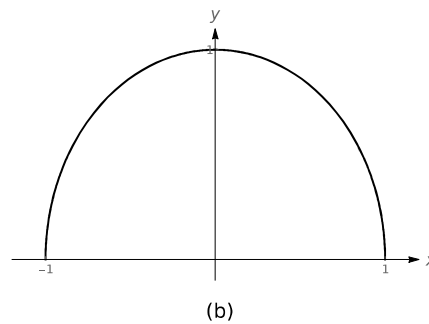
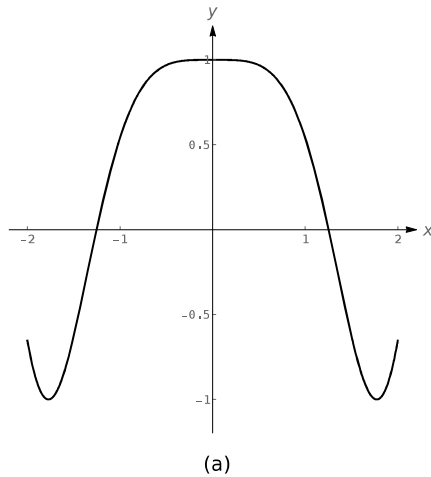
### Voorbeeld 10.2

Bepaal de extrema van de functies met de volgende voorschriften

1.  $f(x) = \cos(x^2)$  over  $[-2, 2]$ ,

2.  $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,

die respectievelijk weergegeven worden in Figuur 10.4(a) en 10.4(b).



**Figuur 10.4:** De grafiek van  $f(x) = \cos(x^2)$  over  $[-2, 2]$  (a) en  $g(x) = \sqrt{1-x^2}$  (b).

### Oplossing

- Evaluatie van  $f$  in de eindpunten van het interval levert:  $f(-2) = f(2) = \cos(4) \approx -0.6536$ . Nu bepalen we de kritieke waarden van  $f$ . Met de kettingregel verkrijgen we  $f'(x) = -2x \sin(x^2)$ . Door  $f'(x) = 0$  te stellen en op te lossen naar  $x$ , vinden we de kritieke waarden van  $f$ . We moeten ons geen zorgen maken over singulariteiten, want  $f'$  is overal gedefinieerd.

Er geldt dat  $f'(x) = 0$  wanneer  $x = 0$  en wanneer  $\sin(x^2) = 0$ . Algemeen geldt

$$\sin(t) = 0 \iff t = \dots - 2\pi, -\pi, 0, \pi, \dots$$

Dus  $\sin(x^2) = 0$  indien  $x^2 = 0, \pi, 2\pi, \dots$  ( $x^2$  is altijd positief, dus we negeren  $-\pi$ , etc.). Dus  $\sin(x^2) = 0$  indien  $x = 0, \pm\sqrt{\pi}, \pm\sqrt{2\pi}, \dots$ . De enige waarden hiervan die in het gegeven interval  $[-2, 2]$  liggen zijn  $0$  en  $\pm\sqrt{\pi}$ , waarbij  $\sqrt{\pi} \approx 1.77$ . We maken een tabel voor de 5 belangrijke waarden:  $x = 0, \pm 2, \pm\sqrt{\pi}$ :

$x$	$-2$	$-\sqrt{\pi}$	$0$	$\sqrt{\pi}$	$2$
$f(x)$	$-0.65$	$-1$	$1$	$-1$	$-0.65$

De maximale waarde van  $f$  op  $[-2, 2]$  is dus  $1$  en komt voor in  $x = 0$ . De minimale waarde is  $-1$  en komt voor in  $x = \pm\sqrt{\pi}$ . De grafiek van  $f$  in Figuur 10.4(a) bevestigt deze resultaten.

2. Er is geen gesloten interval gegeven, dus we bepalen de extrema van  $g$  op zijn domein. De functie  $g$  is gedefinieerd als  $1 - x^2 \geq 0$ . Dus het domein van  $g$  is  $[-1, 1]$ . De evaluatie van  $g$  in beide eindpunten levert  $0$ . Met de kettingregel bekomen we

$$g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De kritische punten van  $g$  zijn de punten waarvoor  $g'(x) = 0$  en de singulariteiten zijn de punten waar  $g'$  niet gedefinieerd is. Het is eenvoudig om na te gaan dat  $g'(x) = 0$  wanneer  $x = 0$  en dat  $g'$  niet gedefinieerd is indien  $x = \pm 1$ , met name de eindpunten van het interval. We krijgen de volgende tabel met belangrijke waarden:

$x$	$-1$	$0$	$1$
$g(x)$	$0$	$1$	$0$

Het maximum is dus  $1$  en komt voor in  $x = 0$ . Het minimum is  $0$  en komt voor in  $x = \pm 1$ .

We kunnen ook de extrema van een stuksgewijs gedefinieerde functie bepalen, zoals geïllustreerd wordt in het volgende voorbeeld.

### Voorbeeld 10.3

Bepaal de maxima en minima van  $f$  op  $[-4, 2]$ , waarbij

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leq 0, \\ x+1, & x > 0. \end{cases}$$

#### Oplossing

Hier is  $f$  stuksgewijs gedefinieerd, maar we kunnen nog steeds dezelfde aanpak als hiervoor hanteren, aangezien de functie continu is over  $[-4, 2]$ , d.i.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ . Evaluatie van  $f$  in de eindpunten levert:

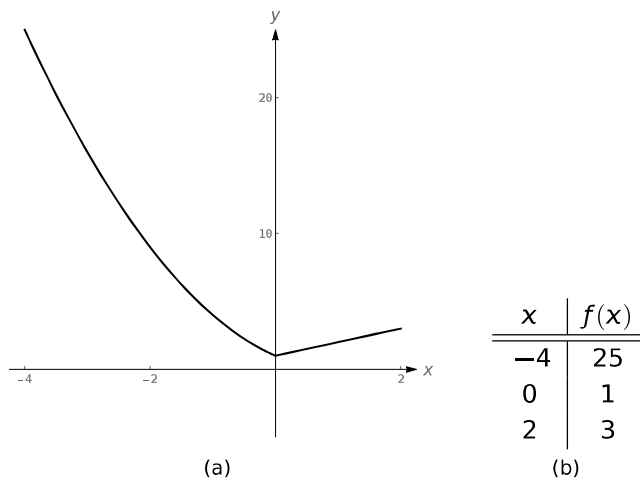
$$f(-4) = 25 \quad \text{en} \quad f(2) = 3.$$

We bepalen nu de kritieke waarden en/of singulariteiten van  $f$ . We moeten  $f'$  stuksgewijs definiëren

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Merk op dat terwijl  $f$  gedefinieerd is over heel  $[-4, 2]$ ,  $f'$  dat niet is, doordat de afgeleide van  $f$  niet bestaat wanneer  $x = 0$ . Langs links nadert de afgeleide  $-2$ , maar langs rechts is de afgeleide  $1$ . Bijgevolg heeft  $f$  een singulariteit in  $x = 0$ .

Nu stellen we  $f'(x) = 0$ . Als  $x > 0$ , dan wordt  $f'(x)$  nooit  $0$ . Als  $x < 0$ , dan wordt  $f'(x)$  ook nooit  $0$ , dus  $f$  heeft geen kritieke waarden. Er zijn dus drie belangrijke  $x$ -waarden te beschouwen:  $x = -4, 2$  en  $0$ . De functie evalueren in elk van deze waarden, levert respectievelijk  $25, 3$  en  $1$  op (Tabel 10.5(b)). Het absolute minimum van  $f$  is dus  $1$  en het absolute maximum is  $25$ , wat bevestigd wordt door de grafiek van  $f$  in Figuur 10.5(a).



**Figuur 10.5:** De grafiek van  $f(x)$  over  $[-4, 2]$  zoals in Voorbeeld 10.3 (a) en het bepalen van de extrema van  $f$  (b).

In de volgende sectie bestuderen we welke bijkomende informatie we kunnen halen uit 'brave' functies. Hier gebruiken we de middelwaardestelling. Over een gesloten interval kunnen we de gemiddelde veranderingssnelheid bepalen. We zullen zien dat er voor afleidbare functies steeds een punt bestaat waarvoor de ogenblikkelijke veranderingssnelheid gelijk is aan de gemiddelde veranderingssnelheid. Dit zal verrassend nuttig blijken.

## 10.2 De middelwaardestelling

### 10.2.1 Inleiding

We motiveren deze sectie met de volgende vraag: Veronderstel dat je op 2 uur tijd naar het huis van een vriend 100 kilometer verderop rijdt. Rijd je op een zeker moment tijdens je reis 50 kilometer per uur?

Bij het beantwoorden van deze vraag is het onmiddellijk duidelijk dat de gemiddelde snelheid gedurende de reis 50 km/u is, maar de vraag is of je ogenblikkelijke snelheid al dan niet exact 50 km/u is op een zeker tijdstip. Het antwoord is, onder zeer redelijke veronderstellingen, ja.

Laten we eens bekijken waarom deze situatie beschreven wordt in een cursus calculus door ze te vertalen in wiskundige symbolen.

Neem eerst aan dat de functie  $y = f(t)$  de reisafstand (in kilometer) weergeeft vanaf jouw huis op tijdstip  $t$  (in uur) waarbij  $0 \leq t \leq 2$ . In het bijzonder is  $f(0) = 0$  en  $f(2) = 100$ . De richtingscoëfficiënt



van de snijlijn door het beginpunt  $(0, f(0))$  en eindpunt  $(2, f(2))$  is dan

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{100 - 0}{2} = 50 \text{ km/u.}$$

De richtingscoëfficiënt in elk punt van de grafiek zelf wordt gegeven door de afgeleide  $f'(t)$ . Dus, aangezien het antwoord op de bovenstaande vraag ja is, betekent dit dat op een bepaald tijdstip tijdens de reis de afgeleide de waarde van 50 km/u aanneemt. Formeel:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 50$$

op een zeker tijdstip  $0 \leq c \leq 2$ .

We kunnen dit als volgt veralgemenen. Gegeven een functie  $y = f(x)$  en een domein  $a \leq x \leq b$ , is de waarde van de afgeleide op een bepaald punt tussen  $a$  en  $b$  gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de snijlijn door  $(a, f(a))$  en  $(b, f(b))$ ? Of equivalent hiermee, heeft de vergelijking

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

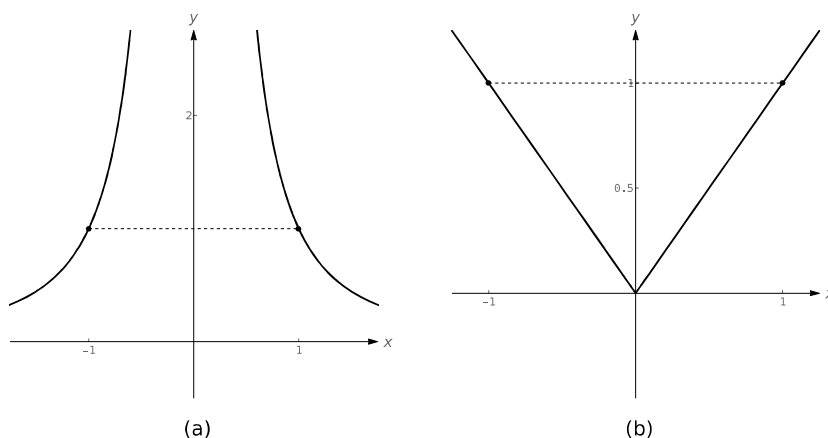
een oplossing voor een zekere  $c$  met  $a < c < b$ ?

Beschouw bijvoorbeeld de functies met voorschriften

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{en} \quad f_2(x) = |x|$$

met  $a = -1$  en  $b = 1$  zoals respectievelijk weergegeven in Figuur 10.6 (a) en (b). Beide functies nemen de waarde 1 aan in  $a$  en  $b$ . Daarom is de richtingscoëfficiënt van de snijlijn door de eindpunten 0 in beide gevallen. Maar wanneer je naar de grafieken kijkt, kan je zien dat er in geen van beide gevallen punten zijn waarvoor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan 0. We zien dus dat er geen  $c$  in  $[-1, 1]$  bestaat waarvoor

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = 0.$$



**Figuur 10.6:** De grafiek van  $f_1(x) = 1/x^2$  (a) en  $f_2(x) = |x|$  (b).

## 10.2.2 De stellingen

Wat ging er dan fout? Het zou geen verrassing mogen zijn dat de discontinuïteit van  $f_1$  en het knikpunt van  $f_2$  een rol spelen. Als onze functies continu en afleidbaar waren geweest, zouden we dan in staat zijn geweest om zo  $c$  te vinden? Dit brengt ons bij de volgende stelling, waarnaar soms verwezen wordt als de stelling van Lagrange.

### Stelling 10.4 (De middelwaardestelling van de differentiaalrekening)

Zij  $y = f(x)$  een continue functie over  $[a, b]$  en afleidbaar over  $]a, b[$ , dan bestaat er een waarde  $c \in ]a, b[$  waarvoor geldt dat

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dat wil zeggen, er bestaat een waarde  $c$  in  $]a, b[$  waarvoor de ogenblikkelijke veranderingssnelheid van  $f$  in  $c$  gelijk is aan de gemiddelde veranderingssnelheid van  $f$  over  $[a, b]$ .

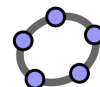
Merk op dat de functies weergegeven in Figuur 10.6(a) en 10.6(b) inderdaad faalden omdat  $f_1$  een discontinuïteit heeft op het interval  $[-1, 1]$  en  $f_2$  niet afleidbaar is in de oorsprong.

We zullen hieronder een bewijs geven van de middelwaardestelling. Daarin gebruiken we de stelling van Rolle genaamd.

### Stelling 10.5 (Stelling van Rolle)

Zij  $y = f(x)$  een continue functie over  $[a, b]$ , afleidbaar over  $]a, b[$  en geldt er dat  $f(a) = f(b)$ , dan bestaat er een  $c \in ]a, b[$  waarvoor geldt dat

$$f'(c) = 0.$$



Beschouw Figuur 10.7 waar de grafiek van een functie  $f$  gegeven is met  $f(a) = f(b)$ . Het is intuïtief duidelijk dat als  $f$  afleidbaar is (en dus continu), er een waarde  $c$  in  $]a, b[$  bestaat met  $f'(c) = 0$ . In het bijzonder bereikt  $f$  een lokaal maximum of minimum op  $]a, b[$ . De stelling van Rolle garandeert het bestaan van minstens één dergelijke waarde; er kunnen er echter meer zijn.

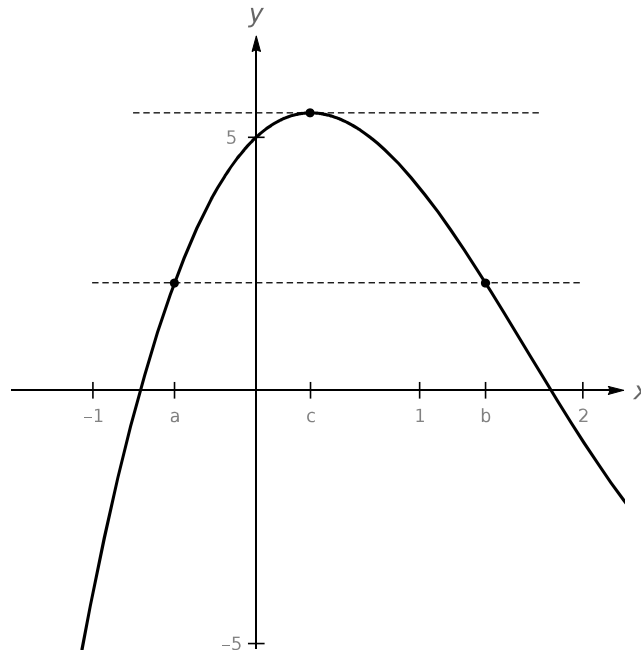
De stelling van Rolle is eigenlijk een speciaal geval van de middelwaardestelling. Als  $f(a) = f(b)$ , dan is de gemiddelde veranderingssnelheid over  $]a, b[$  nul en garandeert de middelwaardestelling dat er een  $c$  bestaat met  $f'(c) = 0$ . We zullen eerst de stelling van Rolle bewijzen en deze vervolgens gebruiken om de middelwaardestelling te bewijzen.

### Bewijs van de stelling van Rolle

**Bewijs** Zij  $f$  afleidbaar over  $]a, b[$  met  $f(a) = f(b)$ . We beschouwen twee gevallen.

**Geval 1:** Beschouw het geval waarin  $f$  constant is over  $[a, b]$ , dus  $f(x) = f(a) = f(b)$  voor alle  $x$  in  $[a, b]$ . Dan is  $f'(x) = 0$  voor alle  $x$  in  $]a, b[$ , wat aantoont dat er tenminste één waarde  $c$  in  $]a, b[$  bestaat met  $f'(c) = 0$ .

**Geval 2:** Veronderstel nu dat  $f$  niet constant is over  $[a, b]$ . De extremumstelling garandeert dat  $f$  een maximum en een minimum bereikt op  $[a, b]$ . Die extrema worden ofwel in de eindpunten ofwel in een kritieke waarde in  $]a, b[$  bereikt. Aangezien  $f(a) = f(b)$  en  $f$  niet constant is, is het duidelijk dat het maximum en minimum niet beiden in de eindpunten bereikt kunnen worden. Veronderstel, zonder verlies van algemeenheid, dat  $f$  zijn maximum niet in een eindpunt bereikt. Dan is er een  $c$  in  $]a, b[$



**Figuur 10.7:** De grafiek van  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 5$ , met  $f(a) = f(b)$ . Merk het bestaan van  $c$  op, met  $a < c < b$ , waarvoor  $f'(c) = 0$ .

waarvoor  $f(c)$  de maximale waarde van  $f$  is. Uit Stelling 10.2 volgt dat  $c$  een kritieke waarde van  $f$  moet zijn en doordat  $f$  afleidbaar is, volgt er dan dat  $f'(c) = 0$  wat het bewijs vervolledigt.  $\square$

We kunnen nu de middelwaardestelling bewijzen.

### Bewijs van de middelwaardestelling

**Bewijs** Definieer de functie met voorschrift

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x.$$

We weten dat  $g$  afleidbaar is over  $]a, b[$  en continu is over  $[a, b]$ , omdat  $f$  dat is. We kunnen aantonen dat  $g(a) = g(b)$  is, maar het is gemakkelijker om aan te tonen dat  $g(b) - g(a) = 0$ , wat volstaat. Nu kunnen we de stelling van Rolle dus toepassen op  $g$ . Die garandeert ons dat er een  $c$  in  $]a, b[$  bestaat waarvoor  $g'(c) = 0$ . Voor deze  $c$  geldt dan dat

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

en bijgevolg

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$



wat te bewijzen was.  $\square$



Om terug te komen op het voorbeeld in het begin van deze sectie, merken we op dat de enige aanname die we moesten maken over onze afstandsfunctie met voorschrift  $f(t)$  was dat ze continu en afleidbaar moest zijn voor  $t$  van 0 tot 2 uur (wat beide redelijke veronderstellingen zijn). De middelwaardestelling verzekert ons dan dat de ogenblikkelijke snelheid op een bepaald tijdstip 50 km/u zal zijn. Dit feit wordt in de praktijk gebruikt, bijvoorbeeld bij snelheidscontroles. De snelheid wordt dan niet op één

ogenblik gemeten door een radar, maar door het tijdstip te bepalen waarop individuele voertuigen over markeringen op de autosnelweg rijden waartussen men de afstand kent. Op basis daarvan kan de gemiddelde snelheid van de wagen tussen de markeringen berekend worden. Als die gemiddelde snelheid groter is dan de toegestane snelheid, dan heeft de bestuurder op een bepaald ogenblik de snelheidslimiet overschreden.

Merk ten slotte nog op dat de middelwaardestelling een **existentiestelling** (*existence theorem*) is. Ze stelt dat er een waarde  $c$  bestaat, maar vertelt niets over hoe men die kan vinden. Wanneer men de middelwaardestelling nodig heeft, is existentie het enige wat we nodig hebben.

### Voorbeeld 10.4

Beschouw  $f(x) = x^3 + 5x + 5$  over  $[-3, 3]$ . Bepaal een  $c$  in  $] -3, 3[$  die voldoet aan de middelwaardestelling.

#### Oplossing

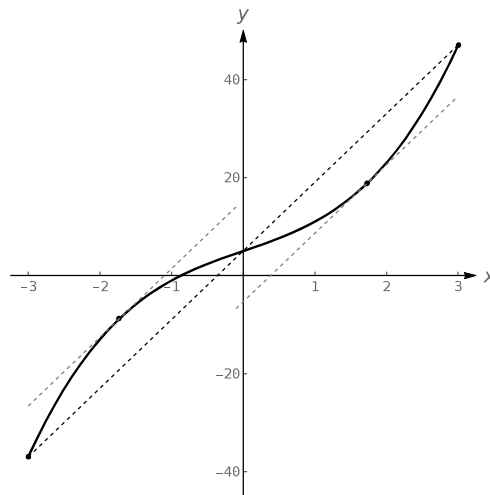
De gemiddelde veranderingssnelheid van  $f$  over  $[-3, 3]$  is:

$$\frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)} = \frac{84}{6} = 14.$$

We willen een  $c$  vinden waarvoor  $f'(c) = 14$ . We vinden  $f'(x) = 3x^2 + 5$ . Gelijkstellen aan 14 en oplossen naar  $x$  levert het volgende op:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 14 \\ \Rightarrow 3x^2 + 5 &= 14 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.732 \end{aligned}$$

We hebben nu 2 waarden voor  $c$  in  $[-3, 3]$  bepaald waar de ogenblikkelijke veranderingssnelheid gelijk is aan de gemiddelde veranderingssnelheid. De middelwaardestelling garandeerde ons het bestaan van tenminste één dergelijke waarde. In Figuur 10.8 wordt  $f$  weergegeven samen met een streepjeslijn die de gemiddelde veranderingssnelheid voorstelt. De raaklijnen aan  $f$  in  $x = \pm\sqrt{3}$  zijn ook weergegeven. Merk op dat deze rechten parallel zijn met de streepjeslijn.



**Figuur 10.8:** Illustratie van de middelwaardestelling in Voorbeeld 10.4.

Hoewel de middelwaardstelling praktische toepassingen heeft, zoals de eerder beschreven snelheidscontroles, wordt ze meestal gebruikt om andere theorieën te ontwikkelen. We zullen de stelling gebruiken in de volgende sectie die een verband legt tussen de vorm van de grafiek van een functie en haar afgeleide.

### 10.3 Stijgende en dalende functies

Tot nu toe spitste onze studie van brave functies  $f$  in dit hoofdstuk zich toe op afzonderlijke punten: punten waar  $f$  maximaal of minimaal is, punten waar  $f'(x) = 0$  of waar  $f'$  niet bestaat en punten  $c$  waar  $f'(c)$  de gemiddelde veranderingssnelheid is.

In deze sectie bestuderen we hoe functies zich gedragen tussen bepaalde punten; we zullen de vorm van hun grafieken onderzoeken. Hiervoor frissen we de volgende definitie uit Hoofdstuk 3 even op.

#### Definitie 10.5 (Stijgende en dalende functies)

Zij  $f$  een functie gedefinieerd op  $I$ .

1.  $f$  is **stijgend** (*increasing*) over  $I$  als  $(\forall a, b \in I \mid a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$ .
2.  $f$  is **dalend** (*decreasing*) over  $I$  als  $(\forall a, b \in I \mid a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b))$ .
3.  $f$  is **constant** (*constant*) over  $I$  als  $(\forall a, b \in I \mid a < b \Rightarrow f(a) = f(b))$ .

Informeel is een functie stijgend als  $f(x)$  groter wordt (i.e. het wordt niet kleiner) wanneer  $x$  groter wordt (d.i. van links naar rechts kijken). Herinner je ook dat als de orde  $\leq$  in de definitie van een stijgende functie vervangen wordt door  $<$ , we spreken van een **strikt stijgende** (*strictly increasing*) functie  $f$  over het interval  $I$  en hetzelfde voor een **strikt dalende** (*strictly decreasing*) functie.

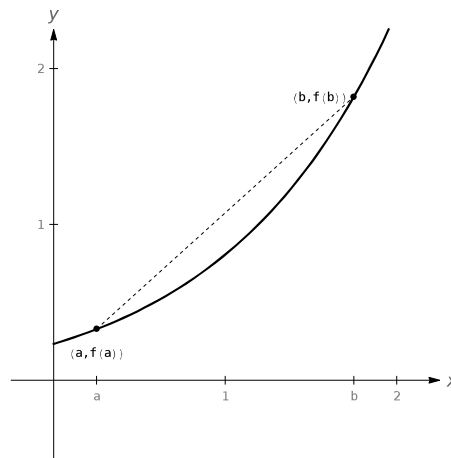
We zijn geïnteresseerd in intervallen binnen het domein van  $f$  waarover  $f$  ofwel stijgend ofwel dalend is. Dergelijke informatie lijkt nuttig. Als  $f$  bijvoorbeeld de snelheid van een voorwerp beschrijft, willen we misschien wel weten of de snelheid toeneemt of afneemt (d.i. of het voorwerp versnelt of vertraagt). Als  $f$  de populatie van een stad beschrijft, zouden we ons kunnen afvragen of de populatie groeit of afneemt.

Om dergelijke intervallen te bepalen, zullen we opnieuw snijlijnen bestuderen. Zij  $f$  een strikt stijgende, afleidbare functie over een open interval  $I$ , zoals weergegeven in Figuur 10.9, en zij  $a < b$  gegeven in  $I$ . De snijlijn aan de grafiek van  $f$  door  $(a, f(a))$  en  $(b, f(b))$  is getekend. De richtingscoëfficiënt van deze rechte bedraagt  $(f(b) - f(a)) / (b - a)$ . We merken het volgende op:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{teller} > 0 \\ \text{noemer} > 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Richtingscoëfficiënt} \\ \text{van de snijlijn} \\ > 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Gemiddelde} \\ \text{veranderingssnelheid} \\ \text{van} \\ f \text{ over } [a, b] \text{ is} \\ > 0. \end{array}$$

Nu hebben we wiskundig aangetoond wat al duidelijk was: wanneer  $f$  strikt stijgt, zullen de raaklijnen aan de grafiek van  $f$  een positieve richtingscoëfficiënt hebben. Herinner je nu dat de middelwaardstelling garandeert dat er een getal  $c$  bestaat met  $a < c < b$  waarvoor

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$



**Figuur 10.9:** Onderzoek van de snijlijn van een stijgende functie.

Door alle dergelijke snijlijnen over  $I$  te beschouwen, vermoeden we sterk dat  $f'(x) > 0$  over  $I$ . Een gelijkaardige uitspraak kan gedaan worden voor strikt dalende functies.

Bovenstaande logica kan als volgt samengevat worden: als  $f$  strikt stijgend is, dan is  $f'$  waarschijnlijk strikt positief. Stelling 10.6 draait dit om door te zeggen dat  $f$  strikt stijgend is, zodra  $f'$  strikt positief is. Dit leidt tot een methode om te bepalen wanneer functies strikt stijgend en dalend zijn.

**Stelling 10.6 (Test voor stijgende/dalende functies)**

Zij  $f$  een continue functie over  $[a, b]$  en stel  $f$  is afleidbaar over  $]a, b[$ .

1. Als  $f'(c) > 0$  voor alle  $c$  in  $]a, b[$ , dan is  $f$  strikt stijgend over  $[a, b]$ .
2. Als  $f'(c) < 0$  voor alle  $c$  in  $]a, b[$ , dan is  $f$  strikt dalend over  $[a, b]$ .
3. Als  $f'(c) = 0$  voor alle  $c$  in  $]a, b[$ , dan is  $f$  constant over  $[a, b]$ .

**Bewijs** We maken gebruik van de middelwaardestelling.

We beginnen met de eerste uitspraak in de stelling, namelijk dat  $f$  strikt stijgend is over  $[a, b]$ , zodra  $f'(c) > 0$  voor alle  $c$  in  $]a, b[$ .

Beschouw  $x_1$  en  $x_2$  in  $[a, b]$  en veronderstel dat  $x_1 < x_2$ . Door de middelwaardestelling toe te passen op  $[x_1, x_2]$ , vinden we een  $c$  met  $x_1 < c < x_2$  en

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Omdat  $x_1 < c < x_2$  weten we dat  $c$  ook in  $]a, b[$  moet liggen en bijgevolg weten we dat  $f'(c) > 0$ . We weten ook dat  $x_2 - x_1 > 0$ . Hieruit volgt dat

$$f(x_2) - f(x_1) > 0.$$

We kunnen dit ook herschrijven als

$$f(x_2) > f(x_1),$$

en aangezien  $x_1$  en  $x_2$  twee willekeurige getallen in  $[a, b]$  waren, is  $f(x)$  dus per definitie strikt stijgend op dit interval.

Het bewijs voor de andere twee uitspraken uit Stelling 10.6 is bijna identiek. □

Zij  $f$  afleidbaar over een interval  $I$  en zij  $a$  en  $b$  waarden in  $I$  met  $f'(a) > 0$  en  $f'(b) < 0$ . Als  $f'$  continu is over  $[a, b]$ , volgt uit de tussenwaardstelling (Stelling 8.11) dat er een bepaalde  $c$  tussen  $a$  en  $b$  bestaat met  $f'(c) = 0$ . Het blijkt dat dit ook geldt als  $f'$  niet continu is over  $[a, b]$ . Dit leidt tot de volgende methode om intervallen te bepalen waarop een functie strikt stijgend of dalend is.

Zij  $f$  een afleidbare functie over een interval  $I$ . Om intervallen te bepalen waarop  $f$  stijgt en daalt:

1. Bepaal de kritieke waarden en singulariteiten van  $f$ . Dit wil zeggen, bepaal alle  $c$  in  $I$  waar  $f'(c) = 0$  is of waar  $f'$  niet gedefinieerd is.
2. Gebruik de kritieke waarden en singulariteiten om  $I$  in deelintervallen op te splitsen.
3. Neem een willekeurig punt  $p$  in elk deelinterval en bepaal het teken van  $f'(p)$ .
  - (a) Als  $f'(p) > 0$ , dan is  $f$  strikt stijgend over dat deelinterval.
  - (b) Als  $f'(p) < 0$ , dan is  $f$  strikt dalend over dat deelinterval.

Merk op dat deel 1 en 2 van Stelling 10.6 geldig blijven als  $f'(c) = 0$  voor een eindig aantal waarden van  $c$  in  $I$ . Met het verschil tussen stijgende en strikt stijgende functies in het achterhoofd kunnen we stellen dat

1. als  $f'(p) \geq 0$ , dan is  $f$  stijgend.
2. als  $f'(p) \leq 0$ , dan is  $f$  dalend.

We illustreren dit proces in het volgende voorbeeld.

### Voorbeeld 10.5

Zij  $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ . Bepaal de intervallen waarover  $f$  strikt stijgend of dalend is.

#### Oplossing

Zoals aangegeven in de bovenstaande methode, bepalen we eerst de kritieke waarden en singulariteiten van  $f$ . We verkrijgen  $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (3x - 1)(x + 1)$ , dus  $f'(x) = 0$  als  $x = -1$  of  $x = 1/3$ .  $f'$  is nergens ongedefinieerd.

Aangezien er geen interval opgegeven is, beschouwen we het volledige domein van  $f$ , wat  $\mathbb{R}$  is. Met de gevonden kritieke waarden delen we dit op in drie intervallen:  $] -\infty, -1 [$ ,  $] -1, 1/3 [$  en  $] 1/3, +\infty [$ .

Nu kiezen we een willekeurige  $p$  in elk interval en bepalen het teken van  $f'(p)$ . We zijn uitsluitend geïnteresseerd in het teken, dus het is niet nodig om  $f'(p)$  volledig te berekenen. Door een goede keuze te maken voor deze waarden  $p$ , kan het rekenwerk beperkt blijven.

**Interval 1:**  $] -\infty, -1 [$

We kiezen (willekeurig)  $p = -2$ . We kunnen  $f'(-2)$  onmiddellijk berekenen:

$$f'(-2) = 3(-2)^2 + 2(-2) - 1 = 7 > 0.$$

We besluiten dat  $f$  stijgt over  $] -\infty, -1 [$ .

Merk op dat we tot hetzelfde besluit kunnen komen zonder te rekenen. We hadden bijvoorbeeld  $p = -100$  kunnen kiezen. De eerste term in  $f'(-100)$ , i.e.  $3(-100)^2$ , is duidelijk positief en zeer groot. In vergelijking hiermee zijn de andere termen klein en zo weten we dat  $f'(-100) > 0$ .

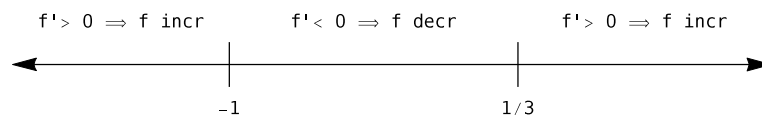
**Interval 2:**  $] -1, 1/3 [$

We kiezen  $p = 0$ , aangezien die waarde eenvoudig is om mee te werken.  $f'(0) = -1 < 0$ . We besluiten dat  $f$  daalt over  $] -1, 1/3 [$ .

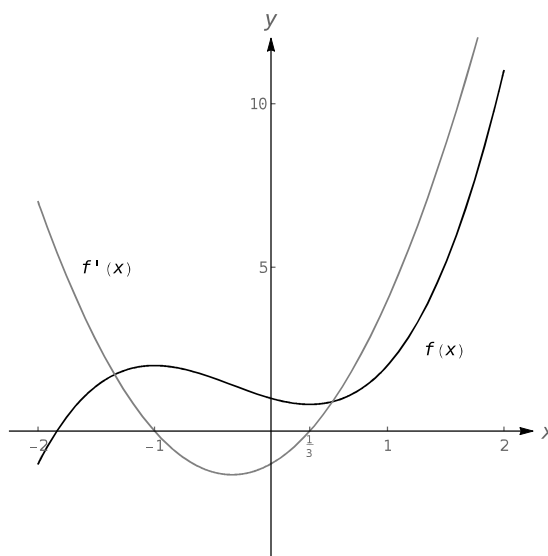
**Interval 3:**  $] 1/3, +\infty [$

Kies een willekeurig grote waarde voor  $p > 1/3$ .  $f'(p) = 3p^2 + 2p - 1$  is dan duidelijk positief. We besluiten dat  $f$  stijgt over  $] 1/3, \infty [$ .

Samengevat:



Met Figuur 10.10, waarop de grafiek van  $f$  wordt weergegeven, kunnen we onze berekeningen nu controleren. Ook de grafiek van  $f'$  wordt op deze figuur weergegeven. Merk op dat  $f' > 0$  wanneer  $f$  strikt stijgt en  $f' < 0$  wanneer  $f$  strikt daalt.



**Figuur 10.10:** De grafiek van  $f(x)$  (zwart) en  $f'(x)$  (grijs) uit Voorbeeld 10.5, die het stijgen en dalen van  $f$  weergeeft.

In Sectie 10.1 leerden we wat lokale maxima en minima zijn en dat deze voorkomen in kritische punten. Uit Voorbeeld 10.5 leren we nu dat functies kunnen overgaan van stijgen naar dalen (en omgekeerd) in kritische punten. Met de concepten stijgen en dalen kan men makkelijk nagaan of een kritisch punt een maximum, minimum of geen van beide is. Stel bijvoorbeeld dat een functie stijgt tot een bepaald kritisch punt in  $x = c$  en daarna daalt. Een snelle schets bevestigt dat  $f(c)$  een lokaal maximum moet zijn. Een gelijkaardige uitspraak geldt voor lokale minima. We formaliseren dit concept in de volgende stelling.



**Stelling 10.7 (Extremumtest)**

Zij  $f$  een afleidbare functie over een interval  $I$  en zij  $c$  een kritieke waarde in  $I$ , dan is

1.  $f(c)$  een lokaal maximum van  $f$  als het teken van  $f'$  in  $c$  wijzigt van positief naar negatief.
2.  $f(c)$  een lokaal minimum van  $f$  als het teken van  $f'$  in  $c$  wijzigt van negatief naar positief.
3.  $f(c)$  geen lokaal extremum van  $f$  als het teken van  $f'$  niet wijzigt in  $c$ .

**Bewijs** We bewijzen enkel de eerste uitspraak van deze stelling, omdat de andere twee zeer gelijkwaardig zijn.

In dit geval hebben we dat  $f'$  positief is over  $]a, c[$  en negatief over  $]c, b[$ . Zij  $x$  een willekeurig punt in  $]a, c[$ . Aangezien  $f$  afleidbaar is over  $]a, c[$  en continu is in  $c$ , is  $f$  continu over  $[x, c]$  en afleidbaar over  $]x, c[$ . Dus met de middelwaardstelling bestaat er een  $x_0$  in  $]x, c[$  zo dat

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} = f'(x_0).$$

Omdat  $x_0$  in  $]x, c[$  ligt, geldt er dat  $f'(x_0) > 0$ . Bovendien is  $c - x > 0$ . Hieruit volgt onmiddellijk dat  $f(c) - f(x) > 0$  of  $f(x) < f(c)$ . Een gelijkaardig argument toont aan dat voor alle  $x$  in  $]c, b[$  geldt dat  $f(x) < f(c)$ . Stel  $h = \min(c - a, b - c)$ . Er geldt dus voor alle  $x$  in  $]c - h, c[ \cup ]c, c + h[$  dat  $f(x) < f(c)$ . Bijgevolg geldt voor alle  $x$  in  $]c - h, c + h[$  dat  $f(x) \leq f(c)$ , wat impliceert dat  $f$  een lokaal maximum heeft in  $c$ .  $\square$

**Voorbeeld 10.6**

Bepaal de intervallen waarover  $f$  stijgt en daalt en bepaal de lokale extrema van  $f$ , met

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}.$$

**Oplossing**

Het domein van  $f$  is  $] -\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$ . Aangezien het domein van  $f$  de unie is van twee intervallen, passen we Stelling 10.7 toe op beide intervallen.

Omdat  $f$  niet gedefinieerd is in  $x = 1$ , kan het stijgen/dalen van  $f$  ter hoogte van deze  $x$ -waarde veranderen. Er doet zich een singulariteit voor in dit punt, dus we moeten hier rekening mee houden.

Met de quotiëntregel bekomen we

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}.$$

We kunnen nu de kritieke waarden en eventuele andere singulariteiten van  $f$  bepalen: we willen weten wanneer  $f'(x) = 0$  is en wanneer  $f'$  niet gedefinieerd is. Dat laatste is eenvoudig: wanneer de noemer van  $f'(x)$  0 is, is  $f'(x)$  niet gedefinieerd. Dat is enkel het geval als  $x = 1$ , waarvan we reeds weten dat het een belangrijke waarde is.

$f'(x) = 0$  wanneer de teller van  $f'(x)$  0 is. Dat gebeurt als  $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0$ ; dus wanneer  $x = -1$  of  $x = 3$ .

We hebben nu twee kritieke waarden voor  $f$  bepaald,  $x = -1$  en  $3$  en in  $x = 1$  zou er ook iets belangrijk kunnen gebeuren. Deze drie getallen verdelen de as van de reële getallen in 4 deelin-

tervallen:

$$]-\infty, -1[, ]-1, 1[, ]1, 3[ \text{ en } ]3, +\infty[.$$

We zullen nu een getal  $p$  in elk deelinterval kiezen en het teken van  $f'$  in  $p$  bepalen om na te gaan of  $f$  stijgt of daalt over dat interval. We maken opnieuw goede keuzes om ingewikkelde berekeningen te vermijden. We merken op dat de noemer van  $f'$  altijd positief is, dus deze kunnen we negeren tijdens ons werk.

**Interval 1:**  $]-\infty, -1[$

Kies een zeer klein getal  $p$  (d.i. een negatief getal met een grote absolute waarde). De teller van  $f'$ ,  $p^2 - 2p - 3$ , zal dan positief zijn. Bijgevolg stijgt  $f$  over  $]-\infty, -1[$ .

**Interval 2:**  $]-1, 1[$

Kies  $p = 0$ :  $f'(0) = -3 < 0$ . We besluiten dat  $f$  daalt over  $]-1, 1[$ .

**Interval 3:**  $]1, 3[$

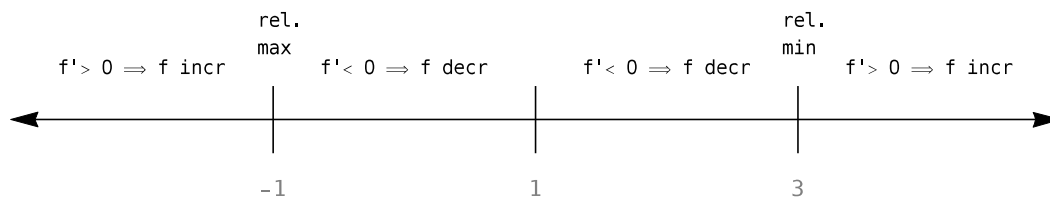
Kies  $p = 2$ :  $f'(2) = -3 < 0$ . Opnieuw daalt  $f$ .

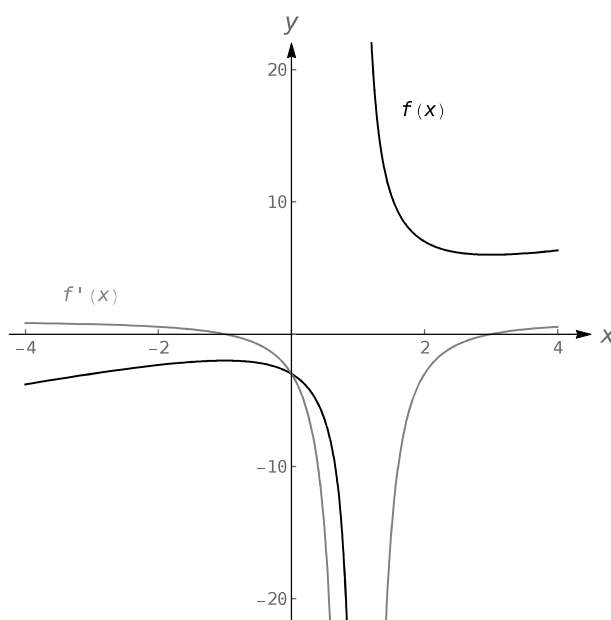
**Interval 4:**  $]3, +\infty[$

Kies een zeer groot getal  $p$ . Dit zal een positieve teller opleveren. Dus  $f$  stijgt over  $]3, +\infty[$ .

Samengevat stijgt  $f$  over de intervallen  $]-\infty, -1[$  en  $]3, +\infty[$  en daalt ze over de intervallen  $]-1, 1[$  en  $]1, 3[$ . Aangezien in  $x = -1$  het teken van  $f'$  verandert van positief naar negatief, stelt Stelling 10.7 dat  $f(-1)$  een lokaal maximum is van  $f$ . In  $x = 3$  verandert het teken van  $f'$  van negatief naar positief, wat betekent dat  $f(3)$  een lokaal minimum is. In  $x = 1$  is  $f$  niet gedefinieerd, dus er is geen lokaal extremum in  $x = 1$ .

Dit wordt samengevat op de onderstaande getallenas. Figuur 10.11 toont een grafiek van  $f$  die onze berekeningen bevestigt. Deze figuur geeft ook  $f'$  weer en illustreert opnieuw dat  $f$  stijgt wanneer  $f' > 0$  en daalt wanneer  $f' < 0$ .





**Figuur 10.11:** De grafiek van  $f(x)$  en  $f'(x)$  uit Voorbeeld 10.6, die het stijgen en dalen van  $f$  weergeeft.

We onderzoeken nog één voorbeeld.

### Voorbeeld 10.7

Bepaal de intervallen waarover  $f(x) = x^{8/3} - 4x^{2/3}$  stijgt en daalt en bepaal de lokale extrema.

Oplossing

We beginnen met het bepalen van de afgeleide functie. Aangezien we  $f'(x) = 0$  willen oplossen, passen we wat algebra toe na het berekenen van de afgeleide.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} - \frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}} \\
 &= \frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x^{\frac{6}{3}} - 1) \\
 &= \frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x^2 - 1) \\
 &= \frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)(x+1).
 \end{aligned}$$

Dit toont dat  $f'(x) = 0$  als  $x = \pm 1$  en dat  $f'$  niet gedefinieerd is als  $x = 0$ . We hebben dus 2 kritieke waarden en 1 singulariteit, wat de getallenas in 4 deelintervallen opdeelt.

**Interval 1:**  $]-\infty, -1[$

We kiezen  $p = -2$ . We kunnen gemakkelijk nagaan dat  $f'(-2) < 0$ . Dus  $f$  daalt over  $]-\infty, -1[$ .

**Interval 2:**  $]-1, 0[$

Kies  $p = -1/2$ . We kunnen het teken van  $f'(p)$  bepalen zonder de waarde echt te berekenen. We bepalen het teken van elk van de drie factoren.

$$f'(p) = \frac{8}{3} \cdot \underbrace{p^{-\frac{1}{3}}}_{<0} \cdot \underbrace{(p-1)}_{<0} \underbrace{(p+1)}_{>0}.$$

Bijgevolg stijgt  $f$  over  $] -1, 0[$ .

**Interval 3:**  $]0, 1[$

We doen een gelijkaardige analyse als hierboven met  $p$  in  $]0, 1[$ .

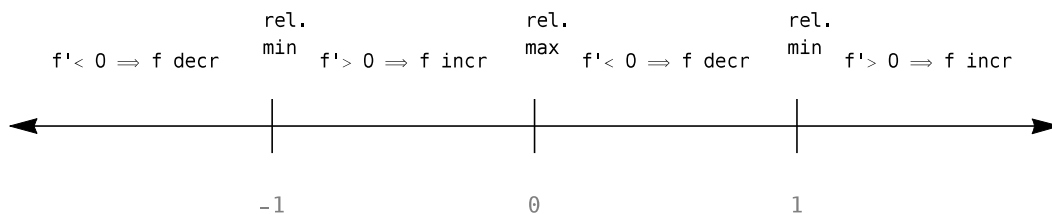
$$f'(p) = \frac{8}{3} \cdot \underbrace{p^{-\frac{1}{3}}}_{>0} \cdot \underbrace{(p-1)}_{<0} \underbrace{(p+1)}_{>0}.$$

We hebben twee positieve factoren en één negatieve factor. Dus  $f'(p) < 0$  en bijgevolg daalt  $f$  over  $]0, 1[$ .

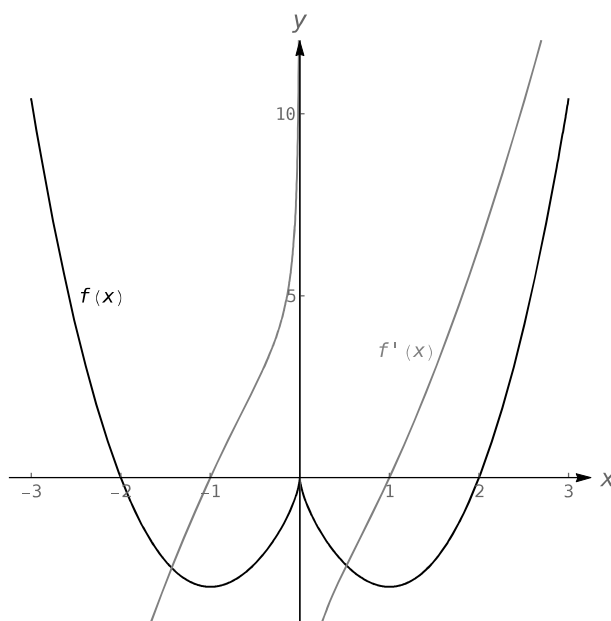
**Interval 4:**  $]1, +\infty[$

Gelijkaardig te werk gaand als bij de vorige drie intervallen, toont men aan dat  $f'(x) > 0$  over  $]1, +\infty[$ . Dus  $f$  stijgt op dit interval.

Uiteindelijk bekomen we:



We besluiten bijgevolg dat  $f$  stijgt over de intervallen  $] -1, 0[$  en  $]1, +\infty[$  en daalt over de intervallen  $] -\infty, -1[$  en  $]0, 1[$ . Het teken van  $f'$  verandert van negatief naar positief in  $x = -1$  en  $x = 1$ , wat met Stelling 10.7 aantoont dat  $f(-1)$  en  $f(1)$  lokale minima van  $f$  zijn. Aangezien het teken van  $f'$  verandert van positief naar negatief in  $x = 0$ , hebben we een lokaal maximum in  $f(0)$ . Figuur 10.12 geeft een grafiek van  $f$  weer en bevestigt ons resultaat. Ook de grafiek van  $f'$  wordt weergegeven en benadrukt nogmaals dat  $f$  stijgt wanneer  $f' > 0$  en daalt wanneer  $f' < 0$ .



**Figuur 10.12:** De grafiek van  $f(x)$  (zwart) en  $f'(x)$  (grijs) uit Voorbeeld 10.7, die het stijgen en dalen van  $f$  weergeeft.

We hebben in deze sectie gezien hoe de eerste-orde afgeleide van een functie helpt om te bepalen wanneer de functie stijgt of daalt. In de volgende sectie zullen we zien hoe de tweede-orde afgeleide helpt om te bepalen hoe de grafiek van een functie buigt.

## 10.4 Concaviteit en de tweede-orde afgeleide

De vorige sectie toonde hoe de eerste-orde afgeleide van een functie,  $f'$ , belangrijke informatie over  $f$  geeft. We passen nu dezelfde techniek toe op  $f'$  zelf en ontdekken wat dit ons vertelt over  $f$ .

De sleutel in het bestuderen van  $f'$  is het beschouwen van zijn afgeleide, namelijk  $f''$ , wat de tweede-orde afgeleide is van  $f$ . Wanneer  $f'' \geq 0$ , stijgt  $f'$ . Wanneer  $f'' \leq 0$ , daalt  $f'$ .  $f'$  heeft lokale maxima en minima waar  $f'' = 0$  of ongedefinieerd is.

Deze sectie onderzoekt hoe informatie over  $f''$  informatie over  $f$  oplevert.

### 10.4.1 Concaviteit

We beginnen met een definitie en ontdekken vervolgens zijn betekenis.

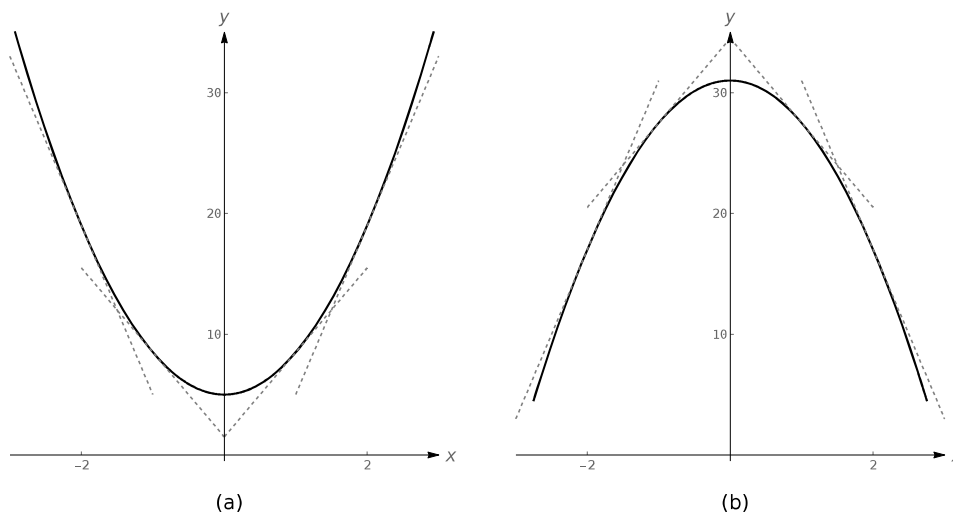
**Definitie 10.6 (Convex en concaaf)**

Zij  $f$  afleidbaar over een interval  $I$ .

1. De grafiek van  $f$  is **convex** (*concave up*) over  $I$  als  $f'$  stijgt.
2. De grafiek van  $f$  is **concaaf** (*concave down*) over  $I$  als  $f'$  daalt.
3. Als  $f'$  constant is, dan wordt er van de grafiek van  $f$  gezegd dat hij geen **concaafteit** (*concavity*) heeft.

Merk op dat we voor de eenvoud vaak zullen zeggen dat  $f$  convex/concaaf is in plaats van dat de grafiek van  $f$  convex/concaaf is. In overeenstemming met de terminologie voor stijgende en dalende functies (Definitie 10.5), noemen we een functie  $f$  bovendien strikt convex/concaaf als  $f'$  strikt stijgt/daalt.

De grafiek van een functie  $f$  is convex als  $f'$  stijgt. Dit betekent dat wanneer men van links naar rechts naar een convexe grafiek kijkt, de richtingscoëfficiënten van de opeenvolgende raaklijnen zullen toenemen. Beschouw Figuur 10.13(a), waar een convexe functie afgebeeld wordt samen met enkele raaklijnen. Merk op hoe de raaklijn links steil naar beneden gaat, wat overeenkomt met een kleine waarde van  $f'$ . Rechts gaat de raaklijn daarentegen steil naar boven, wat dan weer overkomt met een grote waarde van  $f'$ . Als een functie dalend en convex is, dan verkleint de afnamesnelheid. Als een functie stijgend en convex is, dan vergroot de toenamesnelheid.



**Figuur 10.13:** Een functie  $f$  met een convexe (a) en een concaafte (b) grafiek samen met enkele raaklijnen (stippellijnen).

Beschouw nu een concaafte functie. We herhalen eigenlijk wat er in de vorige paragraaf staat met de nodige aanpassingen. De grafiek van een functie  $f$  is concaaf als  $f'$  daalt. Dit betekent dat wanneer we van links naar rechts naar een concaafte grafiek kijken, de richtingscoëfficiënten van de opeenvolgende raaklijnen zullen afnemen. Beschouw Figuur 10.13(b), waar een concaafte functie afgebeeld wordt samen met enkele raaklijnen. Merk op hoe de raaklijn links steil naar boven gaat, wat overeenkomt met een grote waarde van  $f'$ . Rechts gaat de raaklijn daarentegen steil naar beneden, wat dan weer overeenkomt met een kleine waarde van  $f'$ . Als een functie stijgend en concaaf is, dan verkleint de toenamesnelheid. Als een functie dalend en concaaf is, dan vergroot de afnamesnelheid. De functie neemt sneller en sneller af. Meetkundig gezien is het duidelijk dat een functie convex is als zijn grafiek boven zijn raaklijnen ligt en concaaf als zijn grafiek onder zijn raaklijnen ligt.

De definitie van convex en concaaf is gegeven in termen van het stijgen en dalen van de eerste-orde afgeleide. We kunnen de resultaten uit Sectie 10.3 toepassen om intervallen te bepalen waarover een grafiek convex of concaaf is.

**Stelling 10.8 (Concaviteit en de tweede-orde afgeleide)**

*Zij  $f$  tweemaal afleidbaar over een interval  $I$ . De grafiek van  $f$  is convex als  $f'' \geq 0$  over  $I$  en is concaaf als  $f'' \leq 0$  over  $I$ .*

**Bewijs** We zullen enkel het convex zijn van  $f$  bewijzen, want het bewijs voor concaviteit is bijna identiek.

Zij  $a$  een willekeurig getal in  $I$ . De raaklijn aan de grafiek van  $f(x)$  in  $x = a$  is

$$y = \ell(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Om aan te tonen dat  $f(x)$  convex is over  $I$  moeten we aantonen dat voor elke  $x$ ,  $x \neq a$ , in  $I$  geldt dat

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a),$$

of met andere woorden, de raaklijn ligt onder de grafiek van  $f(x)$  op  $I$ . Merk op dat we eisen dat  $x \neq a$ , omdat we in dat punt weten dat  $f(x) = f(a)$  aangezien we over de raaklijn in  $x = a$  spreken.

We beginnen met de veronderstelling dat  $x > a$ . Met de middelwaardstelling op  $[a, x]$  bestaat er een getal  $c$  met  $a < c < x$  en

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a),$$

of equivalent

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a). \quad (10.1)$$

Vervolgens gebruiken we het feit dat  $f''(x) > 0$  voor elke  $x$  in  $I$ . Dit betekent dat de eerste-orde afgeleide  $f'(x)$  stijgt. Nu weten we uit de middelwaardstelling dat  $a < c$  en omdat  $f'(x)$  stijgt, moeten we hebben dat

$$f'(a) < f'(c). \quad (10.2)$$

Aangezien we aannemen dat  $x > a$ , kunnen we beide leden van Ongelijkheid (10.2) vermenigvuldigen met de positieve factor  $x - a$  (die de ongelijkheid dus bewaart) en zo bekomen we

$$f'(a)(x - a) < f'(c)(x - a).$$

Met Vergelijking (10.1) is het rechterlid juist  $f(x) - f(a)$  en dus hebben we

$$f(a) + f'(a)(x - a) < f(x),$$

wat we moesten aantonen. Dus indien  $x > a$  ligt de raaklijn onder de grafiek van  $f(x)$ .

Nu moeten we veronderstellen dat  $x < a$ . Met toepassing van de middelwaardstelling op  $[x, a]$  bestaat er een getal  $c$  met  $x < c < a$  en

$$f(a) - f(x) = f'(c)(a - x).$$

Als we beide leden nu vermenigvuldigen met  $-1$  en vervolgens  $f(a)$  erbij optellen, bekomen we opnieuw Vergelijking (10.1).

Uit de middelwaardstelling weten we echter dat  $c < a$  en omdat  $f''(x) > 0$  voor elke  $x$  in  $I$ , weten we dat de afgeleide nog steeds stijgt en dus hebben we  $f'(c) < f'(a)$ . Vermenigvuldigen we dit nu met

$x - a$ , wat een negatief getal is aangezien  $x < a$ , dan verkrijgen we

$$f'(c)(x-a) > f'(a)(x-a).$$

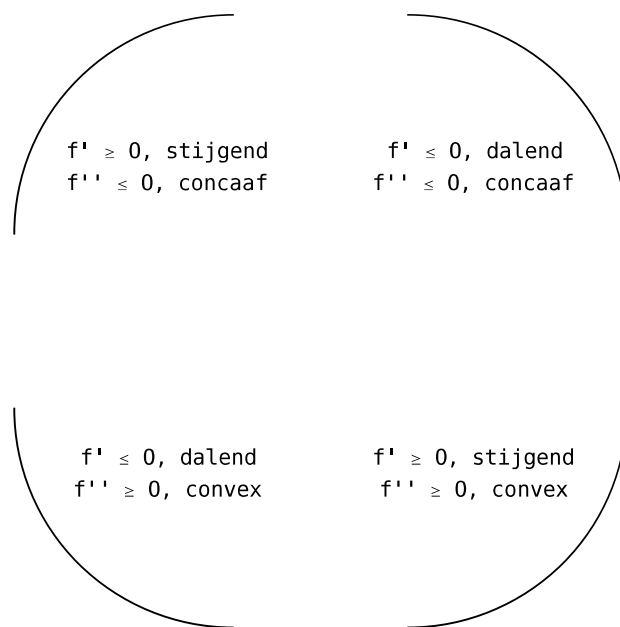
Merk op dat we het ongelijkheidsteken moesten omdraaien, omdat we met een negatief getal vermenigvuldigden. Als we nu  $f(a)$  optellen bij beide leden en vervolgens Vergelijking (10.1) substitueren hierin, bekomen we

$$\begin{aligned} f(a) + f'(c)(x-a) &> f(a) + f'(a)(x-a) \\ \Leftrightarrow f(x) &> f(a) + f'(a)(x-a) \end{aligned}$$

We hebben dus opnieuw aangetoond dat de raaklijn onder de grafiek van  $f(x)$  ligt. We hebben nu aangetoond dat als  $x$  een getal in  $I$  is met  $x \neq a$  de raaklijn aan  $f(x)$  in  $a$  in  $x$  onder de grafiek van  $f(x)$  ligt. Bijgevolg is  $f(x)$  convex over  $I$ .

□

Figuur 10.14 illustreert de vier mogelijkheden waarop concaviteit kan interageren met stijgen/dalen en geeft ook de verbanden met de eerste- en tweede-orde afgeleiden in elk van deze gevallen weer.



**Figuur 10.14:** Illustratie van de vier manieren waarop concaviteit interageert met stijgen/dalen, samen met de verbanden met eerste en tweede afgeleide.

Doordat het belangrijk is te weten waar een grafiek convex/concaaf is, is het logisch dat ook de plaatsen waar een grafiek van het ene naar het andere overgaat van belang zijn. Dit brengt ons bij de volgende definitie.

### Definitie 10.7 (Buigpunt)

Een **buigpunt** (*point of inflection*) is een punt op de grafiek van  $f$  waar de concaviteit van  $f$  wijzigt.

Als de concaviteit van  $f$  wijzigt in een punt  $(c, f(c))$ , dan verandert  $f'$  van stijgen naar dalen (of omgekeerd) in  $x = c$ . Dat betekent dat het teken van  $f''$  wijzigt in  $x = c$ . Dit leidt tot de volgende



stelling.

**Stelling 10.9 (Buigpunten)**

*Zij  $(c, f(c))$  een buigpunt op de grafiek van  $f$ , dan is  $f''(c) = 0$  of is  $f''$  niet gedefinieerd in  $c$ .*

Nu we de concepten van concaviteit en buigpunten geïntroduceerd hebben, is het tijd om deze in te oefenen. Gegeven een functie, zouden we in staat moeten zijn om haar buigpunten en de intervallen waarover hij convex of concaaf is te bepalen. Dit doen we in het volgende voorbeeld.

**Voorbeeld 10.8**

Zij

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Bepaal de buigpunten van  $f$  en de intervallen waarover  $f$  convex/concaaf is.

Oplossing

We moeten  $f'$  en  $f''$  bepalen. Met de quotiëntregel en enkele vereenvoudigingen bekommen we:

$$f'(x) = \frac{-(1+x^2)}{(x^2-1)^2} \quad \text{en} \quad f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Om de mogelijke buigpunten te bepalen, zoeken we waar  $f''(x) = 0$  en waar  $f''$  niet gedefinieerd is. Het oplossen van  $f''(x) = 0$  reduceert zich tot het oplossen van  $2x(x^2+3) = 0$  en levert  $x = 0$ . We bekommen verder dat  $f''$  niet gedefinieerd is wanneer  $x = \pm 1$ , want dan is de noemer van  $f'' = 0$ . We merken op dat  $f$  zelf ook niet gedefinieerd is in  $x = \pm 1$ , en als domein  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, +\infty[$  heeft. Aangezien het domein van  $f$  de unie is van drie intervallen, is het logisch dat de concaviteit kan verschillen tussen deze intervallen. We kunnen technisch gezien niet zeggen dat  $f$  een buigpunt heeft in  $x = \pm 1$ , omdat dit geen deel is van het domein, maar we moeten deze  $x$ -waarden nog steeds als belangrijk beschouwen en opnemen in onze getallenas.

De belangrijke waarden waar de concaviteit zou kunnen veranderen zijn  $x = -1$ ,  $x = 0$  en  $x = 1$ , wat de getallenas in vier deelintervallen opsplijst.

We bepalen de concaviteit in elk van deze intervallen. Hierbij houden we in het achterhoofd dat we enkel geïnteresseerd zijn in het teken van  $f''$  op elk interval.

**Interval 1:**  $]-\infty, -1[$

Kies een getal  $c$  in dit interval met een grote absolute waarde (bijvoorbeeld  $c = -100$ ). De noemer van  $f''(x)$  zal positief zijn. In de teller zal  $(c^2 + 3)$  positief en  $2c$  negatief zijn en bijgevolg zal de teller negatief zijn. Daaruit volgt dat  $f''(c)$  negatief is en we besluiten dat  $f$  concaaf is over  $]-\infty, -1[$ .

**Interval 2:**  $]-1, 0[$

Voor elk getal  $c$  in dit interval zal in de teller de factor  $2c$  negatief en de factor  $(c^2 + 3)$  positief zijn en in de noemer zal de factor  $(c^2 - 1)^3$  negatief zijn. Dus  $f''(c) > 0$  en  $f$  is convex over dit interval.

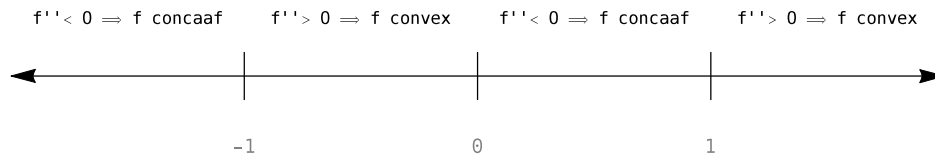
**Interval 3:**  $]0, 1[$

Elk getal  $c$  in dit interval zal positief en klein zijn. De teller zal bijgevolg positief zijn en de noemer negatief. Dus  $f''(c) < 0$  en  $f$  is concaaf over dit interval.

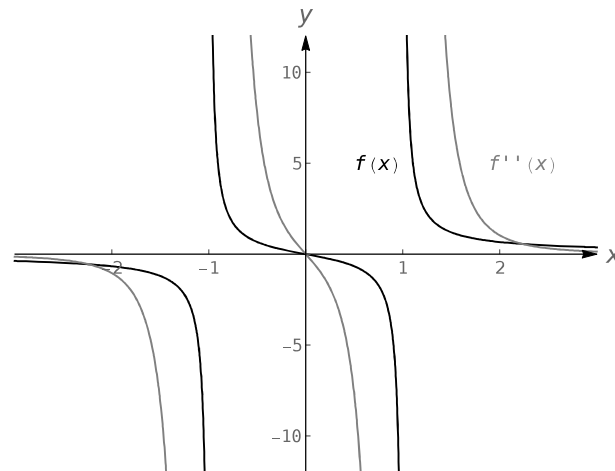
**Interval 4:**  $]1, +\infty[$ 

Kies een grote waarde voor  $c$ . Het is duidelijk dat  $f''(c) > 0$ , dus we besluiten dat  $f$  convex is over  $]1, +\infty[$ .

Aangezien we krijgen dat



besluiten we dat  $f$  convex is over  $] -1, 0[$  en  $]1, +\infty[$  en concaaf over  $] -\infty, -1[$  en  $]0, 1[$ . Er is slechts één buigpunt  $(0, 0)$ , aangezien  $f$  niet gedefinieerd is in  $x = \pm 1$ . Onze resultaten worden bevestigd door de grafiek van  $f$  in Figuur 10.15.



**Figuur 10.15:** De grafiek van  $f(x)$  (zwart) en  $f''(x)$  (grijs) uit Voorbeeld 10.8.

Herinner je dat de lokale maxima en minima van  $f$  gevonden worden in kritische of singuliere punten van  $f$ .

Wat betekent een lokaal maximum van  $f'$ ? De afgeleide is een maat voor de veranderingssnelheid van  $f$ . Het maximum van  $f'$  is dus de plaats waar  $f$  het meest toeneemt, waar  $f$  de steilste raaklijn heeft. Een gelijkaardige uitspraak kan gedaan worden over het minimum van  $f'$ : het komt overeen met de plaats waar  $f$  de steilste naar beneden hellende raaklijn heeft.

We gebruiken dit concept in het volgende voorbeeld.

**Voorbeeld 10.9**

De verkoopcijfers van een zeker product over een tijdspanne van 3 jaar worden gemodelleerd door  $S(t) = t^4 - 8t^2 + 20$ , waarbij  $t$  de tijd is in jaar. In de eerste twee jaar namen de verkoopcijfers af. Bepaal het punt waarop de verkoopcijfers met de grootste snelheid afnamen.

---

**Oplossing**

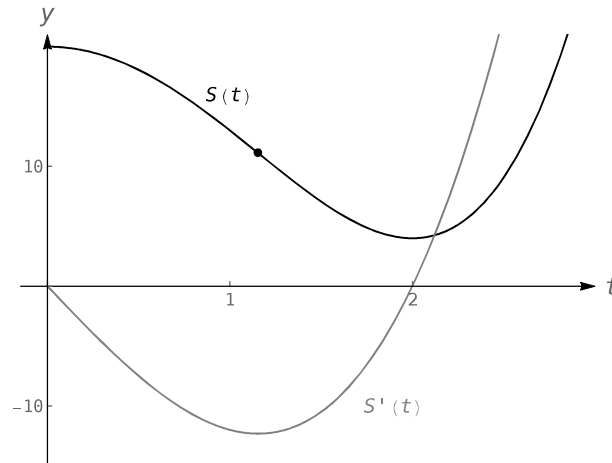

---

We willen de afnamesnelheid maximaliseren. Dat wil zeggen, we willen bepalen waar  $S'$  een minimum heeft. Om dit te doen, bepalen we waar  $S''$  gelijk is aan 0. We vinden  $S'(t) = 4t^3 - 16t$

en  $S''(t) = 12t^2 - 16$ . Stellen we  $S''(t) = 0$  en lossen we dit op, dan bekomen we  $t = \sqrt{4/3} \approx 1.16$ . Hierbij negeren we de negatieve waarden van  $t$ , gezien die niet in het domein van onze functie  $S$  liggen.

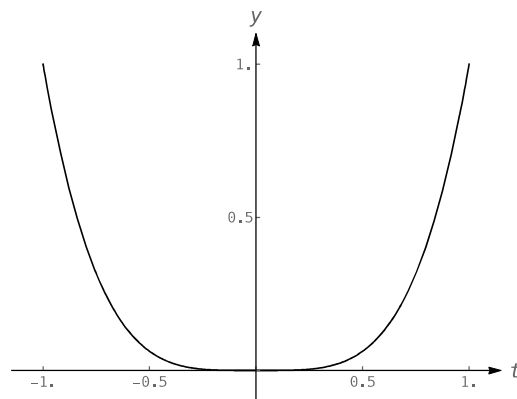
Dit is zowel een buigpunt als het punt van maximale afname. Dit is het punt waarop de zaken voor het eerst verbeteren voor het bedrijf. Na dit buigpunt zal het nog even duren voor de verkoopcijfers zullen stijgen, maar in elk geval nemen ze niet meer zo snel af als ze deden.

De grafieken van  $S(t)$  en  $S'(t)$  worden weergegeven in Figuur 10.16. Wanneer  $S'(t) < 0$ , nemen de verkoopcijfers af. Merk op dat  $S'(t)$  geminimaliseerd wordt op  $t \approx 1.16$ . Dat wil zeggen dat de verkoopcijfers het snelste afnemen op  $t \approx 1.16$ . Over het interval  $]1.16, 2[$ , daalt  $S$ , maar op convexe wijze, zodat de afname in verkoopcijfers afvlakt.



**Figuur 10.16:** De grafiek van  $S(t)$  (zwart) uit Voorbeeld 10.9 samen met  $S'(t)$  (grijs).

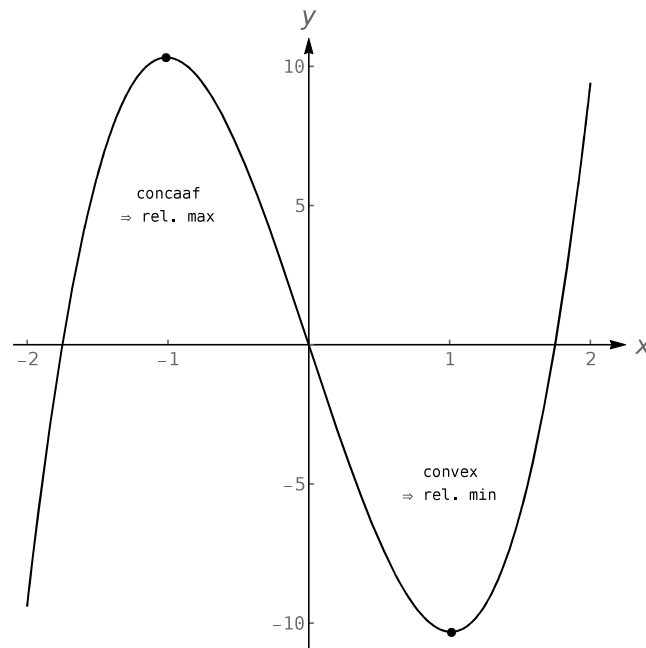
Niet elk kritisch punt komt overeen met een lokaal extremum. De functie met voorschrift  $f(x) = x^3$  heeft bijvoorbeeld een kritisch punt in  $(0, 0)$ , maar heeft geen lokale extrema (Figuur 10.3). Evenzeer is voorzichtigheid gewenst alvorens het woord buigpunt te gebruiken, omdat we moeten controleren of de concaviteit wel degelijk wijzigt in een punt met  $f''(x) = 0$ . Het typevoorbeeld van  $f''(x) = 0$  zonder dat de concaviteit wijzigt is  $f(x) = x^4$ . In  $x = 0$ , is  $f''(x) = 0$ , maar  $f$  is altijd convex, zoals weergegeven in Figuur 10.17.



**Figuur 10.17:** De grafiek van  $f(x) = x^4$ .

### 10.4.2 Concaviteitstest

De eerste-orde afgeleide van een functie gaf ons een test om de kritieke waarden te bepalen die corresponderen met een lokaal maximum, minimum of geen van beide. De tweede-orde afgeleide geeft ons een andere manier om na te gaan of een kritisch punt een lokaal maximum of minimum is. De volgende stelling stelt iets intuïtief: als de kritieke waarde voorkomt in een gebied waar de functie  $f$  convex is, komt het overeen met een minimum van  $f$ , etc. (Figuur 10.18).



**Figuur 10.18:** Illustratie van de concaviteitstest.

#### Stelling 10.10 (Concaviteitstest)

Zij  $c$  een kritieke waarde van  $f$  waar  $f''(c)$  gedefinieerd is, dan heeft

1.  $f$  een lokaal maximum in  $(c, f(c))$  als  $f''(c) < 0$ .
2.  $f$  een lokaal minimum in  $(c, f(c))$  als  $f''(c) > 0$ .
3.  $f$  een lokaal minimum, lokaal maximum of geen lokaal extremum in  $(c, f(c))$  als  $f''(c) = 0$ .

**Bewijs** We veronderstellen dat  $f''(x)$  continu is in een omgeving van  $x = c$ , zodat we kunnen veronderstellen dat  $f''(c) < 0$  ook waar is in een open omgeving, stel  $]a, b[$ , van  $x = c$ , i.e.  $a < c < b$ .

Zij  $x$  een willekeurig getal met  $a < x < c$ . We zullen de middelwaardstelling toepassen op de eerste-orde afgeleide over  $[x, c]$ . Die zegt ons dat er een getal  $d$  bestaat waarvoor  $x < d < c$  zodat,

$$f'(c) - f'(x) = f''(d)(c - x).$$

Omdat  $a < x < d < c$ , weten we nu dat  $f''(d) < 0$  en dat  $c - x > 0$ , dus we verkrijgen dat  $f'(c) - f'(x) < 0$ . We namen echter aan dat  $f'(c) = 0$  en zo bekomen we dat  $f'(x) > 0$ . Of met andere woorden links van  $x = c$  stijgt de functie.

Nu draaien we de zaken om. Zij  $x$  een willekeurig getal zodat  $c < x < b$  en pas de middelwaardstelling

toe op  $[c, x]$  en de eerste-orde afgeleide. Die zegt ons dat er een getal  $c < d < x$  bestaat zodat,

$$f'(x) - f'(c) = f''(d)(x - c).$$

Omdat  $c < d < x < b$  weten we nu dat  $f''(d) < 0$  en dat  $x - c > 0$ , dus we verkrijgen dat  $f'(x) - f'(c) < 0$ . Opnieuw gebruikmakend van het feit dat we ondersteld hebben dat  $f'(c) = 0$ , krijgen we dat  $f'(x) < 0$ . Bijgevolg daalt de functie rechts van  $x = c$ .

Dus links van  $x = c$  stijgt de functie en rechts ervan daalt de functie, wat met de extremumtest oplevert dat  $x = c$  een lokaal maximum is.  $\square$

De concaviteitstest brengen we in verband met de extremumtest op de volgende manier. Als  $f''(c) > 0$ , dan is de grafiek convex in een kritisch punt  $c$  en stijgt  $f'$  in  $x = c$ . Aangezien  $f'(c) = 0$ , moet  $f'$  dan van negatief naar positief gaan in  $c$ . Dit betekent dat de functie  $f$  overgaat van dalen naar stijgen, wat wijst op een lokaal minimum.

### Voorbeeld 10.10

Zij

$$f(x) = \frac{100}{x} + x.$$

Bepaal de kritische punten van  $f$  en classificeer ze als lokale maxima of minima.

---

Oplossing

---

We bekommen

$$f'(x) = -\frac{100}{x^2} + 1$$

en

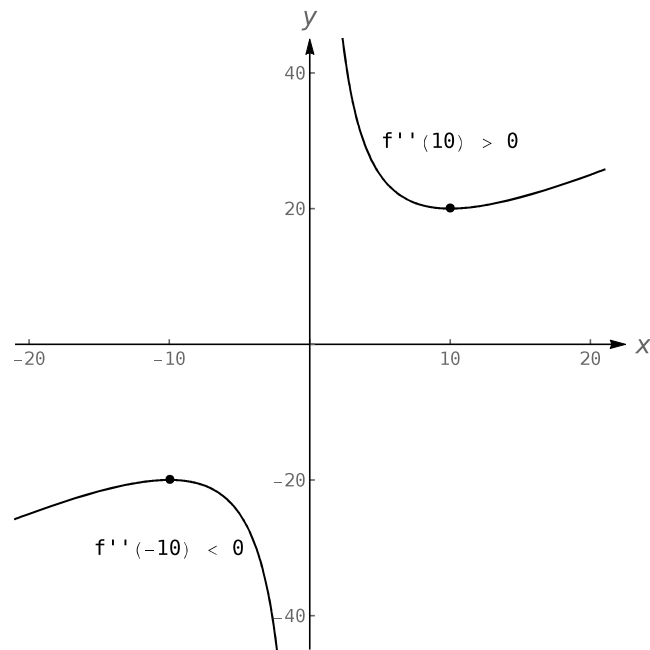
$$f''(x) = \frac{200}{x^3}.$$

We stellen  $f'(x) = 0$  en lossen dit op naar  $x$  om de kritieke waarden te vinden. Merk op dat  $f'$  niet gedefinieerd is in  $x = 0$ , maar  $f$  ook niet, dus dit is geen kritieke waarde. We berekenen dat de kritieke waarden  $x = \pm 10$  zijn. Evaluatie van  $f''$  in  $x = 10$  geeft  $0.2 > 0$ , dus er is een lokaal minimum in  $x = 10$ . Evaluatie van  $f''(-10) = -0.2 < 0$ , levert een lokaal maximum op in  $x = -10$ . Deze resultaten worden bevestigd in Figuur 10.19.

We hebben geleerd hoe de eerste- en tweede-orde afgeleide van een functie informatie over de grafiek van die functie opleveren. We hebben intervallen waarover de grafiek stijgt en daalt, intervallen waarover de grafiek convex en concaaf is, punten waar de functie lokale extrema bereikt en buigpunten bepaald. Verder zagen we in Hoofdstuk 8 hoe limieten het asymptotisch gedrag verklaren. In de volgende paragraaf combineren we dit alles om een nauwkeurige schets te maken van functies.

## 10.5 Functie-onderzoek

We hebben geleerd hoe we het gedrag van een functie kunnen begrijpen op basis van zijn eerste- en tweede-orde afgeleide. Tot nu toe hebben we de eigenschappen van een functie afzonderlijk behandeld, maar hier zullen we deze combineren om een nauwkeurige grafiek van de functie te bekommen, zonder al te veel punten te plotten. Waarom? Hulpprogramma's voor grafieken zijn zeer toegankelijk, hetzij op een computer, rekentoestel of smartphone. Deze middelen zijn vaak zeer snel en nauwkeurig. Herinner je bijvoorbeeld dat we een grafiek in Python kunnen plotten met het ingebouwde commando `Plot`, terwijl `ContourPlot` gebruikt kan worden om een impliciet gedefinieerde functie te plotten (zie Hoofdstuk 3). We zullen zien dat onze methode niet bepaald snel is.



**Figuur 10.19:** De grafiek van  $f(x) = 100/x + x$  uit Voorbeeld 10.10.

We willen het gedrag van een functie  $f$  begrijpen aan de hand van de informatie gegeven door zijn afgeleiden. Terwijl alle afgeleiden van een functie informatie over de functie verschaffen, blijken  $f'$  en  $f''$  het grootste deel van het gedrag te verklaren. Een goed begrip van de wisselwerking tussen de grafiek van  $f$  en  $f'$  en  $f''$  is heel belangrijk. Om dit te begrijpen, kan men beweren dat je veel grafieken moet bestuderen. Dit is tot op bepaalde hoogte waar, maar het is een beetje zoals beweren dat iemand kan begrijpen hoe een motor werkt door enkel naar afbeeldingen te bekijken. Het klopt dat de basisideeën overgebracht zullen worden, maar al doende leert men meer.

Doorloop de volgende stappen om een nauwkeurige schets van een functie  $f$  te maken.

1. Bepaal het domein van  $f$ . In het algemeen onderstellen we dat dit  $\mathbb{R}$  is. Dat zullen we dan beperken door de gebieden uit te sluiten waar de noemer 0 is of waar iets negatief onder een wortel verschijnt.
2. Bepaal de symmetrieën en de snijpunten met de assen.
3. Bepaal de asymptoten van  $f$ :
  - (a) verticale,
  - (b) horizontale,
  - (c) schuine asymptoten.
4. Bepaal de kritische en de singuliere punten van  $f$ .
5. Bepaal de mogelijke buigpunten van  $f$ .
6. Maak een getallenas die alle kritische punten, mogelijke buigpunten en verticale asymptoten bevat. Bepaal op elk gecreëerd interval of  $f$  stijgt of daalt, convex of concaaf is.
7. Evalueer  $f$  in elk kritisch punt en elk mogelijk buigpunt. Plot deze punten op een assenstelsel. Verbind deze punten door krommen die de gepaste concaviteit hebben. Schets de asymptoten en de snijpunten met de assen.

**Voorbeeld 10.11**

Schets de grafiek van  $f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 7x + 5$ .

**Oplossing**

We volgen het bovenstaande stappenplan.

1. Het domein van  $f$  is de volledige reële rechte. Er zijn geen  $x$ -waarden  $c$  waarvoor  $f(c)$  niet gedefinieerd is.
2. We kunnen makkelijk nagaan dat de functie noch even noch oneven is. De  $x$ -waarde van het snijpunt met de  $x$ -as is ongeveer  $x = -0,424$  en de  $y$ -waarde van het snijpunt met de  $y$ -as is  $y = 5$ .
3. (a) Er zijn geen verticale asymptoten.  
(b) We bepalen het gedrag op oneindig met limieten voor  $x$  gaande naar  $-\infty$  en  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

We hebben dus geen horizontale asymptoten.

- (c) Er zijn geen schuine asymptoten aangezien

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 3x^2 - 10x + 7 + \frac{5}{x} \right) = +\infty.$$

4. We bepalen de kritieke waarden van  $f$ . We berekenen  $f'(x) = 9x^2 - 20x + 7$ . De wortels van  $f'$  zijn:

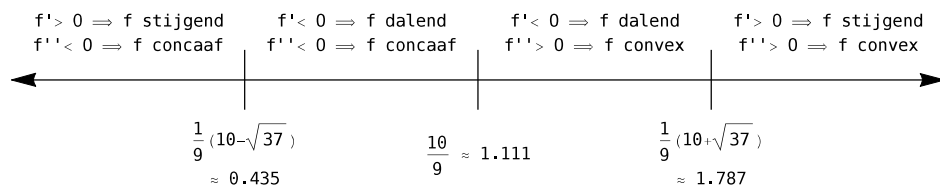
$$x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(9)(7)}}{2(9)} = \frac{1}{9} (10 \pm \sqrt{37}),$$

dus we bekommen  $x \approx 0,435$  of  $x \approx 1,787$ .

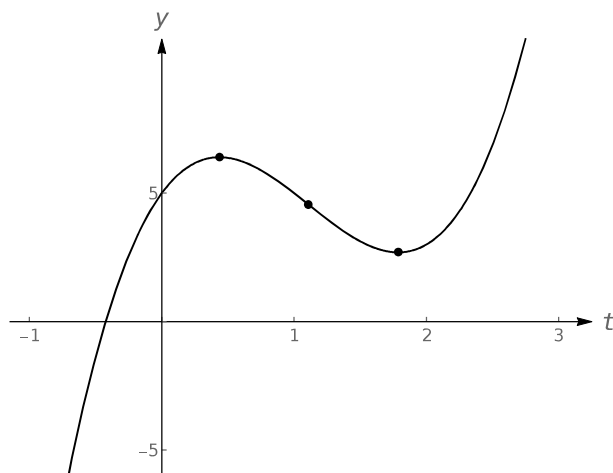
5. Bepaal de mogelijke buigpunten van  $f$ . Bereken  $f''(x) = 18x - 20$ . Er geldt dat

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{10}{9} \approx 1,111.$$

6. We plaatsen de waarden  $x = (10 \pm \sqrt{37})/9$  en  $x = 10/9$  op een getallenas. We bepalen voor elk interval of de grafiek stijgt of daalt en convex of concaaf is:



7. We plotten nu de punten bij de gevonden  $x$ -waarden en verbinden ze zodat de juiste concaviteit wordt weergegeven. Onze kromme snijdt de  $y$ -as in  $y = 5$  en de  $x$ -as nabij  $x = -0,424$  (Figuur 10.20).



**Figuur 10.20:** Een schets van  $f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 7x + 5$  uit Voorbeeld 10.11.

### Voorbeeld 10.12

Schets de grafiek van

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 6}.$$

---

#### Oplossing

---

We volgen opnieuw het bovenstaande stappenplan.

1. Bij het bepalen van het domein, veronderstellen we dat het volledig  $\mathbb{R}$  is en zoeken beperkingen. We merken dat  $f$  in  $x = -2$  en  $x = 3$  niet gedefinieerd is, omdat de noemer van  $f$  gelijk is aan 0 in deze punten. Dus:

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \wedge x \neq 3\}.$$

2. We kunnen makkelijk nagaan dat de functie noch even noch oneven is. De  $x$ -waarden van snijpunten met de  $x$ -as zijn  $x = -1$  en  $x = 2$  en de  $y$ -waarde van het snijpunt met de  $y$ -as is  $y = 1/3$ .
3. (a) De verticale asymptoten van  $f$  liggen in  $x = -2$  en  $x = 3$ , de plaatsen waar  $f$  ongedefinieerd is en de teller van  $f(x)$  niet nul wordt.  
 (b) Er is een horizontale asymptoot in  $y = 1$ , aangezien  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$  en  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .  
 (c) Er zijn geen schuine asymptoten, omdat er reeds horizontale asymptoten zijn.
4. Om de kritieke waarden van  $f$  te bepalen, berekenen we eerst  $f'(x)$ . Met de quotiëntregel vinden we dat

$$f'(x) = \frac{-8x + 4}{(x^2 + x - 6)^2} = \frac{-8x + 4}{(x - 3)^2(x + 2)^2}.$$

Dus  $f'(x) = 0$  wanneer  $x = 1/2$ , en  $f'$  is ongedefinieerd wanneer  $x = -2$  of  $x = 3$ . Aangezien  $f'$  enkel ongedefinieerd is als  $f$  dat is, zijn dit geen singulariteiten. De enige kritieke waarde is  $x = 1/2$ .

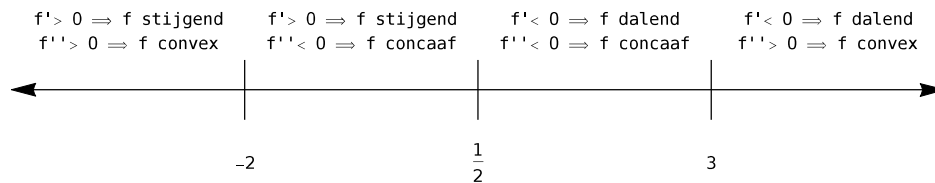


5. Om de mogelijke buigpunten te bepalen, berekenen we  $f''(x)$ . Met alweer de quotiëntregel vinden we:

$$f''(x) = \frac{24x^2 - 24x + 56}{(x-3)^3(x+2)^3}.$$

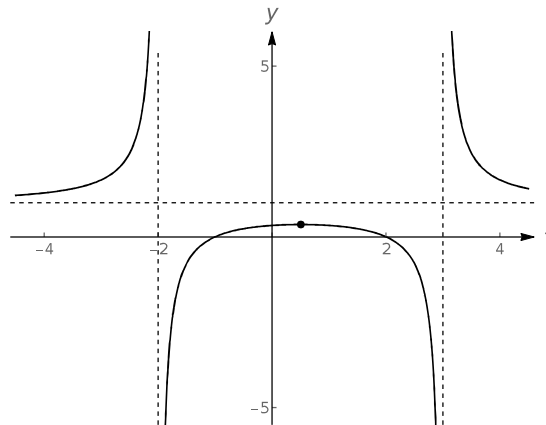
We zien dat  $f''(x)$  nooit 0 wordt en  $f''$  is ongedefinieerd wanneer  $x = -2$  of  $x = 3$ . De concaviteit kan dus eventueel wijzigen in  $x = -2$  en  $x = 3$ .

6. We plaatsen de waarden  $x = 1/2$ ,  $x = -2$  en  $x = 3$  op een getallenas. We bepalen voor elk interval of de grafiek stijgt of daalt en convex of concaaf is:



We zien dat  $f$  een lokaal maximum in  $x = 1/2$  heeft. De concaviteit wijzigt enkel ter hoogte van de verticale asymptoten.

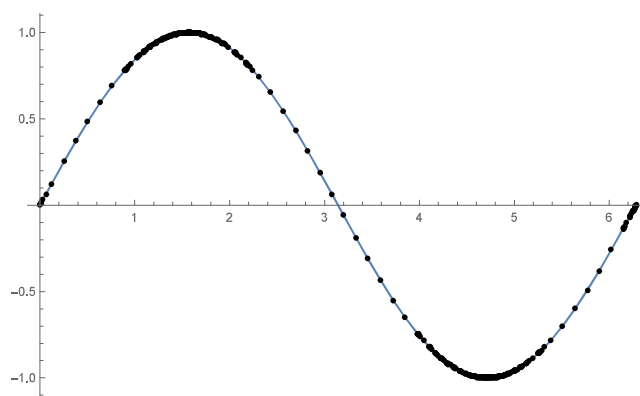
7. In Figuur 10.21 plotten we de punten van de getallenas op een assenstelsel en verbinden hen zodanig dat we de juiste concaviteit krijgen. We tonen ook dat  $f$  de  $x$ -as snijdt in  $x = -1$  en  $x = 2$ .



**Figuur 10.21:** Een schets van  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 6}$  uit Voorbeeld 10.12.

Waarom zijn computerprogramma's zo goed in het schetsen van een kromme? Dat is niet omdat computers slimmer zijn dan wij. Het is vooral omdat ze veel sneller zijn dan wij. In het algemeen plotten computers de grafieken van functies door eerst punten op een gelijke afstand te plotten en deze dan te verbinden met lijnen. Door veel punten te plotten, zijn de verbindingslijnen kort en lijken de grafieken glad. Dit werkt meestal vrij goed, maar in gebieden waar de grafiek erg krom is, kan dit voor zichtbare hoeken zorgen, tenzij een heel groot aantal punten gebruikt wordt. Computeralgebrasystemen zoals Python gebruiken speciale algoritmen om enkel veel punten te plotten waar de grafiek erg krom is.

In Figuur 10.22, wordt de grafiek van  $y = \sin(x)$  weergegeven, gegenereerd door Python met de Python-functie Plot. De punten stellen de plaatsen voor waar Python de functiewaarde berekende. Merk op dat Python in de bochten van  $\sin(x)$  veel punten gebruikt, terwijl er op de stukken waar de grafiek van  $\sin(x)$  relatief recht is, minder punten gebruikt worden. Bovendien worden veel punten berekend in de buurt van de eindpunten om het gedrag nauwkeurig weer te geven.



**Figuur 10.22:** Een deel van de grafiek van  $y = \sin(x)$  gegenereerd door Python.

Hoe weet Python waar de grafiek krom is? Calculus. Wanneer we in een later hoofdstuk kromming bestuderen, zullen we zien hoe de eerste- en tweede-orde afgeleide van een functie samen een maat van kromming geven. Python gebruikt algoritmen om gebieden met hoge kromming te bepalen en beschouwt daar extra punten. Opnieuw, het doel van deze sectie is om te begrijpen dat de vorm van de grafiek van een functie voor een groot deel bepaald wordt door het gedrag van de functie op een aantal sleutelposities. In Voorbeeld 10.12 konden we bijvoorbeeld de ingewikkelde grafiek nauwkeurig schetsen gebruikmakend van slechts een aantal punten en de asymptoten!

#### Computeralgebrasystemen

Een computeralgebrasysteem is wiskundige software die de mogelijkheid biedt om wiskundige uitdrukkingen te manipuleren zoals de mens. De ontwikkeling van dergelijke systemen begon in de tweede helft van de vorige eeuw. De eerste populaire computeralgebrasystemen waren muMATH, Reduce, Derive en Macsyma. Vandaag de dag zijn de populairste commerciële systemen Mathematica en Maple, die gebruikt worden door veel onderzoekswiskundigen, wetenschappers en ingenieurs. Een gratis alternatief is bijvoorbeeld SageMath<sup>a</sup>.

<sup>a</sup><http://www.sagemath.org/>

## 10.6 Optimalisatie

In Sectie 10.1 leerden we over extrema – de grootste en kleinste waarden die een functie bereikt op een interval. Hier passen we de concepten van extrema toe op situaties die ons vragen om een gepast wiskundig kader te ontwerpen waarin we het probleem kunnen oplossen.

We beginnen met een klassiek voorbeeld, gevolgd door een algemenere bespreking van het concept optimalisatie.

### Voorbeeld 10.13

Een man heeft een omheining van 100 meter, een groot erf en een kleine hond. Hij wil met die omheining een zo groot mogelijk rechthoekig terrein voor zijn hond afbakenen. Welke afmetingen heeft zo een terrein met maximale oppervlakte?

#### Oplossing

Door een rechthoek te tekenen, merken we dat we de afmetingen van deze rechthoek nodig hebben om een functie voor de oppervlakte op te stellen. Laat  $x$  en  $y$  de lengtes van de zijden

van de rechthoek voorstellen. Het is duidelijk dat

$$\text{Oppervlakte} = xy.$$

We weten echter meer over de situatie: de man beschikt over 100 meter omheining. Doordat we dus weten dat de omtrek van de rechthoek 100 moet zijn, kunnen we een andere vergelijking opstellen

$$\text{Omtrek} = 100 = 2x + 2y.$$

We hebben nu twee vergelijkingen in twee onbekenden. We lossen de laatste vergelijking op naar  $y$ :

$$y = 50 - x.$$

Nu vervangen we  $y$  in de vergelijking voor de oppervlakte door deze uitdrukking:

$$\text{Oppervlakte} = A(x) = x(50 - x).$$

Merk op dat we nu een functie in één variabele  $x$  hebben. Dit is de oppervlakte functie.

Deze functie is enkel interpreteerbaar als  $0 \leq x \leq 50$ , anders krijgen we een negatieve waarde voor de oppervlakte. Dus we zoeken de extrema van  $A(x)$  over het interval  $[0, 50]$ .

Om de kritische punten te zoeken, nemen we de afgeleide van  $A(x)$  en stellen we deze gelijk aan 0. Vervolgens lossen we deze vergelijking op naar  $x$ .

$$\begin{aligned} A(x) &= x(50 - x) \\ &= 50x - x^2 \\ A'(x) &= 50 - 2x \end{aligned}$$

We lossen  $50 - 2x = 0$  op en bekomen  $x = 25$ . Dit is het enige kritische punt. We evalueren  $A(x)$  in de eindpunten van ons interval en in dit kritische punt om de extrema te vinden. Hier zijn we enkel geïnteresseerd in het maximum.

Het is duidelijk dat  $A(0) = 0$  en  $A(50) = 0$ , terwijl  $A(25) = 625\text{m}^2$ . Dit is het maximum. Aangezien we eerder al hadden dat  $y = 50 - x$ , bekomen we ook  $y = 25$ . Een rechthoek met een omtrek van 100 m en een maximale oppervlakte is een vierkant met zijdes van lengte 25 m.

Dit voorbeeld is zeer eenvoudig en een beetje gekunsteld. In de realiteit maken mensen meestal eerst een ontwerp en kopen daarna pas een omheining die aan hun noden tegemoet komt en niet omgekeerd. Maar het modelleert wel het proces: vergelijkingen opstellen die het probleem beschrijven, deze reduceren tot één functie in één variabele en dan de gezochte extreme waarde bepalen.

In realiteit zijn problemen veel complexer. De vergelijkingen zijn vaak niet reduceerbaar tot één vergelijking in één variabele en de vergelijkingen zelf kunnen bovendien een ingewikkelde vorm hebben.

We schetsen hier de basismethode om deze optimalisatieproblemen aan te pakken.

1. Begrijp het probleem. Ga na wat er gemaximaliseerd of geminimaliseerd moet worden. Een schets kan hierbij helpen.
2. Stel de relevante vergelijkingen voor het probleem op, maak hierbij gebruik van de gegevens.
3. Als de fundamentele vergelijking, die de grootte die gemaximaliseerd/geminimaliseerd moet worden definieert, afhangt van meerdere variabelen, reduceer deze dan tot een functie van één variabele door substituties te doen met de andere vergelijkingen.
4. Bepaal het domein van de functie, rekening houdend met de context van het probleem.

5. Bepaal de extrema van deze functie op het domein.
6. Bepaal de waarden van alle relevante grootheden voor het probleem.

We zullen deze stappen illustreren in het volgende voorbeeld.

### Voorbeeld 10.14

Een vrouw heeft 100 m omheining, een kleine hond en een groot erf met een beek (die zo goed als recht is). Ze wil met die omheining een zo groot mogelijk rechthoekig terrein voor haar hond afbakenen, waarbij de beek één zijde van het terrein vormt. Welke afmetingen heeft zo een terrein met maximale oppervlakte?

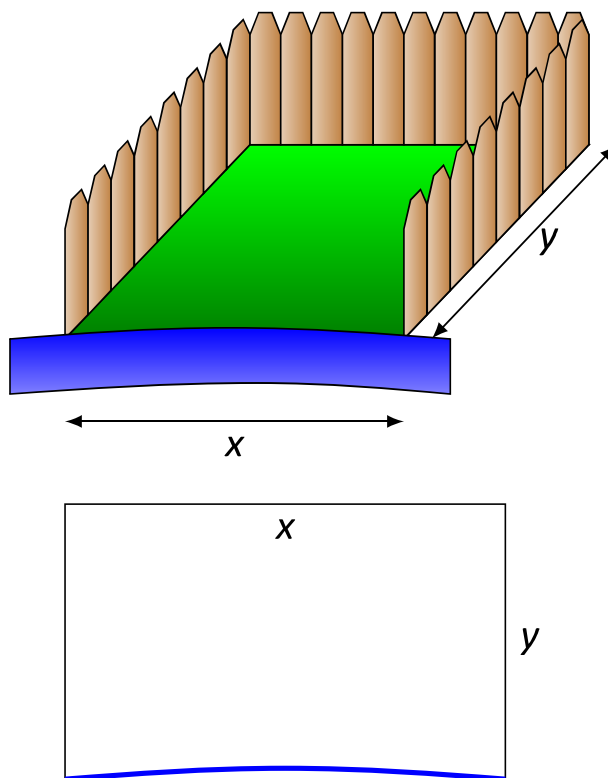
---

#### Oplossing

---

We zullen het bovenstaand stappenplan volgen.

1. We maximaliseren de oppervlakte. Een schets van het gebied zal helpen. (Figuur 10.23) geeft twee schetsen van het voorgestelde afgebakende oppervlak. Een sleutelkenmerk van beide schetsen is dat één zijde niet omheind is.



**Figuur 10.23:** Een schets van de afbakening in Voorbeeld 10.14.

2. We willen de oppervlakte maximaliseren. Zoals in Voorbeeld 10.13, hebben we een andere vergelijking nodig om deze in één variabele uit te drukken. We doen opnieuw beroep op de omtrek. Hier is de omtrek

$$\text{Omtrek} = 100 = x + 2y.$$

Merk op dat dit verschilt van het vorige voorbeeld.

3. We reduceren de fundamentele vergelijking nu tot een vergelijking met één enkele variabele. De vergelijking van de omtrek oplossen naar  $y$  geeft  $y = 50 - x/2$ . We kunnen Oppervlakte nu schrijven als

$$\text{Oppervlakte} = A(x) = x(50 - x/2) = 50x - \frac{1}{2}x^2.$$

Oppervlakte is nu gedefinieerd als een functie van één variabele.

4. We eisen dat de oppervlakte niet negatief is. Aangezien  $A(x) = x(50 - x/2)$ , moet dus  $x \geq 0$  en  $50 - x/2 \geq 0$ . Die laatste ongelijkheid impliceert dat  $x \leq 100$ , dus  $0 \leq x \leq 100$ .
5. We bepalen nu de extrema. In de eindpunten wordt het minimum gevonden, wat een oppervlakte van 0 oplevert. We berekenen  $A'(x) = 50 - x$  om de kritische punten te bepalen. Dit gelijk stellen aan 0 en oplossen naar  $x$  levert  $x = 50$ . Hier verkrijgen we een oppervlakte van

$$A(50) = 50(25) = 1250.$$

6. Eerder stelden we al  $y = 50 - x/2$ , dus  $y = 25$ . Onze rechthoek zal dus 2 zijdes van lengte 25 hebben en één zijde van lengte 50, met een totale oppervlakte van  $1250 \text{ m}^2$ .

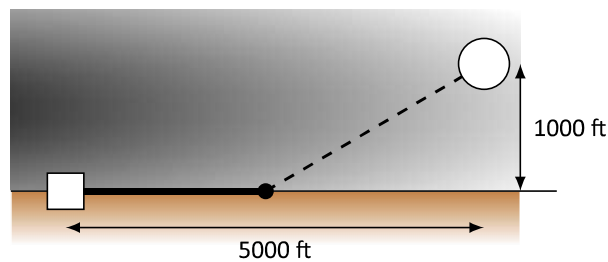
Denk eraan dat we bij het oplossen van deze problemen eigenlijk een methode uitvoeren. We leren een probleem om te zetten in een stelsel van vergelijkingen. Deze vergelijkingen laten ons dan toe om een zekere grootte in functie van een variabele uit te drukken. Die functie optimaliseren we dan.

Voorbeeld 10.15 is een ander klassiek probleem, waarbij we focussen op het minimaliseren van de kosten.

### Voorbeeld 10.15

Er moet een stroomkabel van een elektriciteitscentrale op het strand naar een platform voor de kust getrokken worden. Figuur 10.24 geeft de afstanden weer tussen de elektriciteitscentrale en het platform.

Het kost €50/m om een elektriciteitskabel over land te trekken en €130/m om een elektriciteitskabel onder water te trekken. Hoeveel meter elektriciteitskabel moet er op het land liggen, opdat de totale kost minimaal zou zijn? Wat is die minimale kost?



**Figuur 10.24:** Een stroomkabel trekken van een elektriciteitscentrale naar een platform voor de kust met minimale kost.

### Oplossing

Er zijn twee oplossingen die we meteen kunnen beschouwen, maar die we zullen verwerpen. Ten eerste zouden we de afstand tussen beide locaties kunnen minimaliseren door de twee locaties te verbinden met een rechte lijn. Dit zorgt er echter voor dat de hele kabel onder water ligt, wat de duurste optie is. Ten tweede zouden we de lengte van de kabel onder water kunnen minimaliseren

door een kabel van 5000 m langs het strand te leggen en dan de zee loodrecht over te steken naar het platform. Dit heeft het ongewenste effect dat de kabel de langst mogelijke afstand heeft, wat waarschijnlijk niet de kleinste kost oplevert.

De optimale oplossing is waarschijnlijk dat de kabel een tijdje over land getrokken wordt en daarna onder water, zoals de figuur impliceert. We moeten onze ongekende afstanden, de lengte van de kabel over land en de lengte van de kabel onder water, benoemen. Merk op dat de lengte van het deel onder water gezien kan worden als de schuine zijde van een rechthoekige driehoek. Daarom stellen we de lengte van het deel dat over land getrokken wordt voor als  $5000 - x$ , zodat de lengte onder water  $\sqrt{x^2 + 1000^2}$  bedraagt. Nu stellen we een kostenfunctie op.

$$\begin{aligned} \text{Kost} &= \text{land kost} & + & \text{water kost} \\ & \text{€}50 \times \text{afstand land} & + & \text{€}130 \times \text{afstand water} \\ & 50(5000 - x) & + & 130\sqrt{x^2 + 1000^2}. \end{aligned}$$

We bekomen dus  $c(x) = 50(5000 - x) + 130\sqrt{x^2 + 1000^2}$ . Deze functie heeft enkel betekenis op het interval  $[0, 5000]$ . Hoewel we vrij zeker zijn dat de eindpunten van het interval geen minimale kost zullen opleveren, kunnen we  $c(x)$  nog steeds evalueren in elk eindpunt om dit te controleren:

$$c(0) = 380,000 \quad c(5000) \approx 662,873.$$

We bepalen nu de kritische waarden van  $c(x)$ . We berekenen  $c'(x)$  als

$$c'(x) = -50 + \frac{130x}{\sqrt{x^2 + 1000^2}}.$$

Merk op dat dit nergens ongedefinieerd is. Gelijkstellen aan 0 en oplossen naar  $x$  geeft  $x = 1250/3 \approx 416,67$ . Evaluatie van  $c(x)$  in  $x = 416,67$  levert een kost van ongeveer €370 000 op. De lengte van de kabel over land is  $5000 - 416,67 = 4583,33$  m en de lengte onder water is  $\sqrt{416,67^2 + 1000^2} \approx 1083$  m.

In de oefeningen zal je een grote variatie aan situaties tegenkomen die een combinatie van probleemoplossende vaardigheden en calculus vragen. Focus je op hoe je vanuit die situaties vergelijkingen opstelt, die vervolgens gemanipuleerd kunnen worden in wat je nodig hebt. Vermijd het vanbuiten leren van hoe je deze problemen juist oplost. De methode onder de knie krijgen zal je veel meer opleveren dan enkel de specifieke technieken vanbuiten te leren.

In de volgende hoofdstukken zullen we het omgekeerde probleem beschouwen: gegeven een functie  $f$ , kunnen we een functie bepalen waarvan de afgeleide  $f$  is? Als we hiertoe in staat zijn, gaat een ongelooflijke wereld aan wiskunde en toepassingen open.

A good mathematician  
solves problems by making  
them more concrete.

Before we build the skyscraper,  
let's make a model.



A great mathematician  
solves problems by making  
them more abstract.


Before we build the skyscraper,  
let's study the skyline!

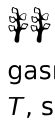


Overgenomen uit *Math with Bad Drawings*, met toestemming van Ben Orlin.

## 10.7 Oefeningen

### Extrema

 **Opgave 10.1** — Bepaal het extremum van de functie  $y = x^{(x^2)}$ . Toon aan dat het een minimum is.


 **Opgave 10.2** — De Maxwell-Boltzmann-verdeling beschrijft de verdeling van de snelheden van gasmoleculen in een ideaal gas. De kans dat een molecuule met massa  $m$  in een gas met temperatuur  $T$ , snelheid  $v$  heeft, is


$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}},$$


met  $k$  een constante. Bepaal de snelheid  $v$  waarvoor  $f(v)$  maximaal is.

### De middelwaardestelling


**Opgave 10.3** — Ga voor de functies met onderstaande voorschriften na of de middelwaardestelling (stelling 10.4) kan toegepast worden over het beschouwde interval. Bepaal, indien mogelijk, een  $c \in ]a, b[$  die gegarandeerd wordt door de stelling.


 (a)  $f(x) = x^2 + 3x - 1$ ,  $[-2, 2]$


 (b)  $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ,  $[0, 3]$

 (c)  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 1}$ ,  $[0, 2]$

**Opgave 10.4** — Ga voor de functies met onderstaande voorschriften na of de stelling van Rolle (stelling 10.5) kan toegepast worden over het beschouwde interval. Bepaal, indien mogelijk, een  $c \in ]a, b[$  zodat  $f'(c) = 0$ .

 (a)  $f(x) = x^2 + x - 6$ ,  $[-3, 2]$

 (b)  $f(x) = x^2 + x$ ,  $[-2, 2]$

 (c)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $[0, \pi]$

### Functie-onderzoek

 **Opgave 10.5** —

- (a) Onderzoek de grafiek van de functie  $y = xe^{-kx^2}$ , met  $k \in \mathbb{R}$ . Bepaal hiertoe het domein, de nulpunten, symmetrieën, asymptoten, extrema en buigpunten. Bij de bepaling van de asymptoten dient er een bespreking voor de verschillende waarden van  $k$  te gebeuren ( $k < 0$ ,  $k = 0$ ,  $k > 0$ ).



(b) Bepaal de waarde van de parameter  $k$  zodanig dat er zich een maximum voordoet bij  $x = 1$ .

(c) Maak een tekenschema van de functie en een schets van de grafiek voor de gevonden waarde van  $k$ .

**Opgave 10.6** — Onderzoek de beeldlijn van de functies met de volgende voorschriften.

$$\wp (a) f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

$$\wp (b) f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\wp (c) f(x) = \ln(2^x - 1)$$

$$\wp (d) f(x) = \ln(\cos(x))$$

$$\wp (e) f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\wp (f) f(x) = x - 2 \sin(x)$$

$$\wp (g) f(x) = x + \sin(x)$$

$$\wp (h) f(x) = \frac{x+7}{\sqrt{x^2-3}}$$

$$\wp (i) f(x) = \frac{e^{-x}}{x^3}$$

$$\wp (j) f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\wp (k) f(x) = \frac{2 \ln(x)}{1 - \ln(x)}$$

$$\wp (l) f(x) = \frac{|1+x| - 1}{x}$$

$$\wp (m) f(x) = |2 - \sqrt{2x+4}|$$

$$\wp (n) f(x) = \frac{x^2}{x|x|+1}$$

$$\wp (o) f(x) = |(x-2)^2 - 4|$$

$$\wp (p) f(x) = \sinh(x) - x$$

$$\wp (q) f(x) = e^x \sinh(x)$$

$$\wp (r) f(x) = \coth(x) + x$$

$$\wp (s) f(x) = \operatorname{artanh}\left(\frac{4}{x}\right)$$

$$\wp (t) f(x) = \ln(\sqrt{e^x + e^{-x}})$$

$$\wp (u) f(x) = \arctan(\ln(x))$$

$$\wp (v) f(x) = x^x$$

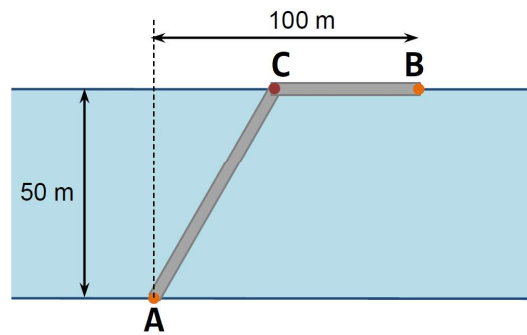
$$\wp (w) f(x) = (x^2)^x$$

$$\wp (x) f(x) = \operatorname{arcosh}(\sqrt{x-2})$$

$$\wp (y) f(x) = e^{-x} \sin(x), \quad (x \geq 0)$$

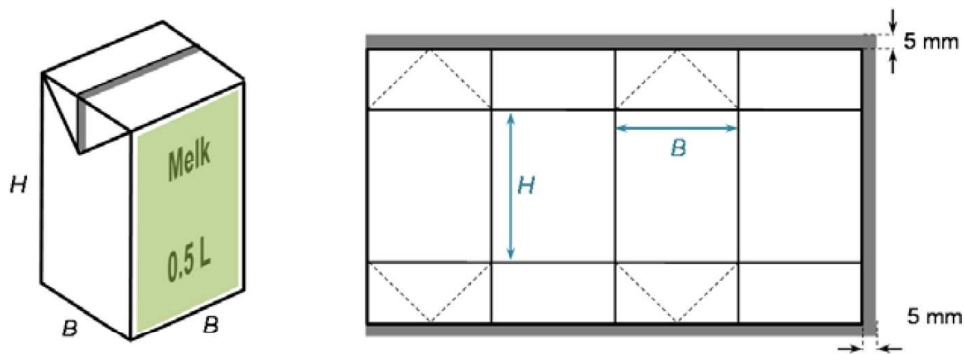
## Optimalisatie

$\wp$  **Opgave 10.7** — De gemeente moet een pijpleiding aanleggen tussen punt  $A$  en punt  $B$  op beide oevers van een rivier (Figuur 10.25). De kostprijs om de leiding onder water te leggen is echter drie keer zo groot als die om de leiding over land te leggen. Bepaal het punt  $C$  waar de pijpleiding aan de tegenoverliggende oever moet toekomen opdat de kostprijs minimaal zou zijn.



**Figuur 10.25:** Schematische voorstelling van de pijpleiding uit Opgave 10.7.

**Opgave 10.8** — Een kartonnen doos met inhoud 0.5 l wordt gevormd uit een stuk geplastificeerd karton zoals afgebeeld in Figuur 10.26. Het grondvlak is een vierkant met zijde  $B$ , de stippellijnen wijzen op de plooilijnen en de grijze stroken zijn voor het lijmen. Bepaal de hoogte  $H$  en de basis  $B$  om 0.5 l te bekomen als inhoud met een minimale hoeveelheid karton.



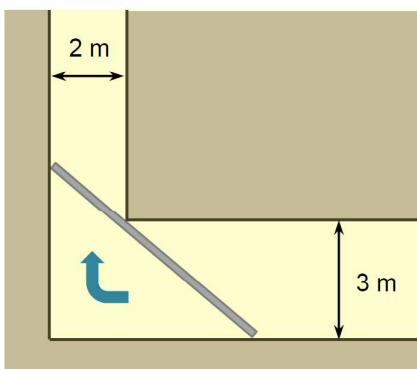
**Figuur 10.26:** Schematische voorstelling van de melkdoos uit Opgave 10.8.

**Opgave 10.9** — Een omwentelingskegel ligt volledig binnen een bol met straal  $R$  cm. De top van de kegel ligt op de bol en zijn as is een diameter van de bol. Het volume van een kegel wordt gegeven door

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3},$$

waarbij  $r$  de straal van het grondvlak is en  $h$  de hoogte van de kegel. Bereken  $r$  en  $h$  opdat de inhoud van de kegel maximaal zou zijn.

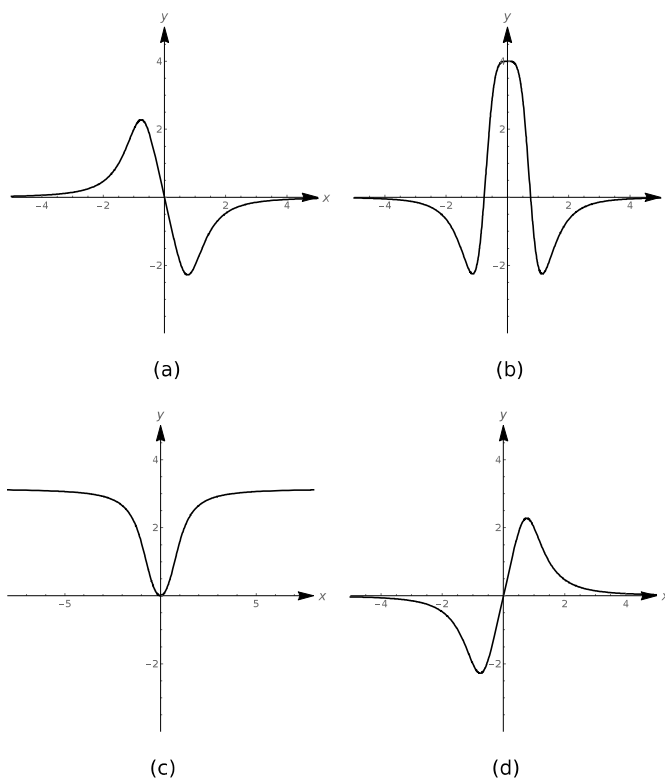
**Opgave 10.10** — Een loden buis wordt horizontaal getransporteerd door een gang die 3 m breed is (Figuur 10.27). Op het einde van de gang volgt een draai van  $90^\circ$  en versmalt de gang tot 2 m. Wat is de lengte van de grootste buis die men horizontaal om de hoek kan dragen?



**Figuur 10.27:** Schematische voorstelling van de loden buis uit Opgave 10.10.

## Overkoepelende oefeningen

**Opgave 10.11** — In Figuur 10.28 is de grafiek te zien van een functie  $f$ , haar twee afgeleide functies  $f'$  en  $f''$  en een functie  $g$ . Welke grafiek komt overeen met welke functie?

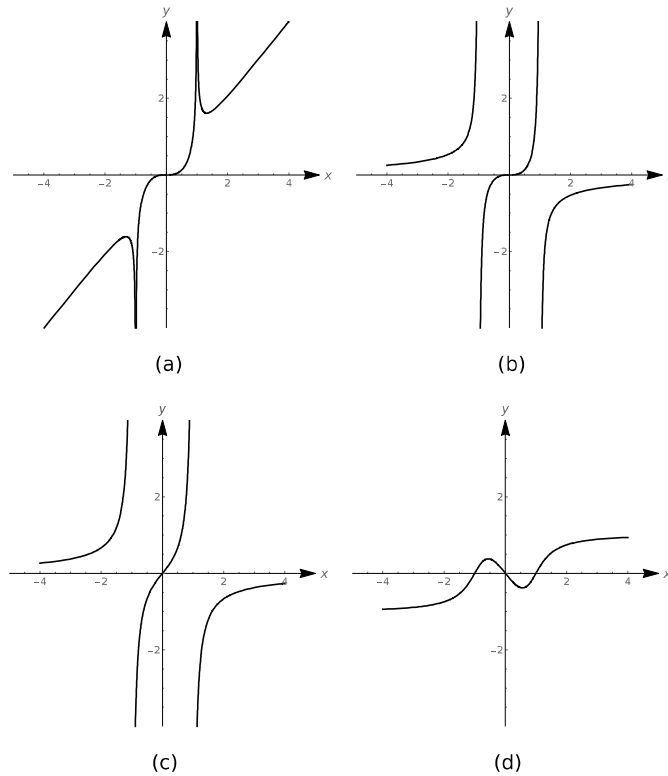


**Figuur 10.28:** Figuur die hoort bij Opgave 10.11

**Opgave 10.12** — In Figuur 10.29 staan de grafieken van de vier functies:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}, \quad g(x) = \frac{x^3}{1-x^4}, \quad h(x) = \frac{x^3-x}{\sqrt{x^6+1}} \quad \text{en} \quad k(x) = \frac{x^3}{\sqrt{|x^4-1|}}.$$

Welke grafiek komt overeen met welke functie?



**Figuur 10.29:** Figuur die hoort bij Opgave 10.12.

**Opgave 10.13** — Bepaal voor de functies met de onderstaande voorschriften, indien mogelijk, de lokale maxima en/of minima en eventuele buigpunten. Bepaal eveneens de intervallen waarover de desbetreffende functie convex of concaaf is.

$$\text{☞ (a) } f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 9x + 5$$

$$\text{☞ (c) } f(x) = x^2 \ln(x)$$

$$\text{☞ (b) } f(x) = \sin(x) + \cos(x), \quad x \in ]-\pi, \pi[$$

$$\text{☞ (d) } f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

**Opgave 10.14** — Beschrijf de kritische punten en mogelijke buigpunten van de functie  $f$  in functie van  $a$  en  $b$ .

$$\text{☞ (a) } f(x) = \frac{a}{x^2 + b^2}$$

$$\text{☞ (b) } f(x) = \sin(ax + b)$$

*At its heart, engineering is about using science to find creative, practical solutions. It is a noble profession.*

— Queen Elizabeth II —

# 11

## Poolcoördinaten en parametervergelijkingen

### 11.1 Poolcoördinaten

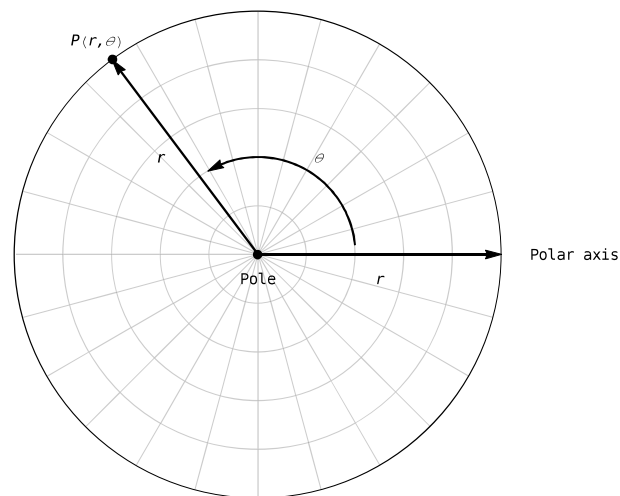
#### 11.1.1 Definitie

In Sectie 3.1 introduceerden we de cartesische coördinaten van een punt in een vlak. We definieerden het cartesisch coördinatenstelsel door gebruik te maken van twee getallenassen, een horizontale en een verticale, die in een rechte hoek in de oorsprong snijden. Vandaar worden cartesische coördinaten vaak **rechthoekige coördinaten** (rectangular coordinates) genoemd. In deze sectie introduceren we een nieuw systeem om coördinaten toe te kennen aan punten in het vlak, namelijk **poolcoördinaten** (*polar coordinates*). We vertrekken van een oorsprong, die de **pool** (*pole*) wordt genoemd, en een rechte, die de **poolas** (*polar axis*) wordt genoemd. We identificeren het punt  $P$  dan door gebruik te maken van twee coördinaten,  $(r, \theta)$ ;  $r$  is de afstand tot de oorsprong en  $\theta$  de hoek gemeten vanaf de poolas (Figuur 11.1). De poolcoördinaten van een punt geven dus weer hoe ver het zich bevindt van de pool ( $r$ ) en hoever we moeten roteren vanaf de poolas ( $\theta$ ).

Als we bijvoorbeeld het punt  $P$  met de poolcoördinaten  $(4, \frac{5\pi}{6})$  wensen te plotten, vertrekken we van de pool, bewegen we ons 4 eenheden langs de poolas en draaien we dan  $\frac{5\pi}{6}$  radialen tegen de wijzers van de klok in. We kunnen dit natuurlijk ook uitvoeren door eerst te roteren.

Als  $r < 0$  bewegen we weg van de pool en roteren we in wijzerzin weg van de poolas als  $\theta < 0$ . Verder zou het niet mogen verbazen dat elk punt in poolcoördinaten oneindig veel andere weergaven heeft. Veronderstel dat  $(r, \theta)$  en  $(\tilde{r}, \tilde{\theta})$  poolcoördinaten zijn met  $r \neq 0$ ,  $\tilde{r} \neq 0$  en waarvan de hoeken in radialen worden gegeven. Dan stellen  $(r, \theta)$  en  $(\tilde{r}, \tilde{\theta})$  hetzelfde punt  $P$  voor als en slechts als het volgende geldt:

- $\tilde{r} = r$  en  $\tilde{\theta} = \theta + 2\pi k$  met  $k \in \mathbb{Z}$



**Figuur 11.1:** Poolcoördinaten.

- $\tilde{r} = -r$  en  $\tilde{\theta} = \theta + (2k + 1)\pi$  met  $k \in \mathbb{Z}$

Tot slot stellen alle poolcoördinaten van de vorm  $(0, \theta)$  de pool voor, ongeacht de waarde van  $\theta$ .

#### Poolcoördinaten binnen de luchtvaart

Vliegtuigen gebruiken een enigszins aangepaste versie van poolcoördinaten voor navigatie. In dit systeem wordt de nulgradenas doorgaans koers 360 genoemd en de hoeken worden bepaald met de klok mee, in plaats van tegen de klok in. Koers 360 komt overeen met de magnetische noordpool, terwijl koersen 90, 180 en 270 respectievelijk overeenkomen met het magnetische oosten, zuiden en westen. Als een vliegtuig zich dus 5 zeemijlen naar het oosten verplaatst, zal het zich 5 eenheden verplaatsen in koers 90.

### 11.1.2 Poolcoördinaten en cartesische coördinaten

Om poolcoördinaten te associëren met cartesische coördinaten stellen we de pool en de poolas gelijk aan respectievelijk de oorsprong en de x-as uit het cartesisch coördinatenstelsel. We verkrijgen dan het volgende resultaat.

#### Stelling 11.1 (Omzetting tussen cartesische coördinaten en poolcoördinaten)

Veronderstel een punt  $P$  dat voorgesteld wordt in cartesische coördinaten als  $(x, y)$  en in poolcoördinaten als  $(r, \theta)$ . Dan geldt

- $x = r \cos(\theta)$  en  $y = r \sin(\theta)$ ;
- $x^2 + y^2 = r^2$  en  $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$  (met  $x \neq 0$ ).

Als  $r > 0$ , dan is Stelling 11.1 een onmiddellijk gevolg van Stelling 5.5 samen met de definitie van de tangens. Als  $r < 0$ , dan kennen we een alternatieve weergave voor  $(r, \theta)$ , namelijk  $(-r, \theta + \pi)$ . Aangezien geldt dat  $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$  en  $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$  levert het toepassen van de stelling

op  $(-r, \theta + \pi)$

$$\begin{cases} x = (-r) \cos(\theta + \pi) = (-r)(-\cos(\theta)) = r \cos(\theta) \\ y = (-r) \sin(\theta + \pi) = (-r)(-\sin(\theta)) = r \sin(\theta). \end{cases}$$

Verder geldt dat  $x^2 + y^2 = (-r)^2 = r^2$  en  $\frac{y}{x} = \tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$ . De stelling klopt dus ook in dit geval. Het overige geval is  $r = 0$ , waarbij  $(r, \theta) = (0, \theta)$  de pool is. Aangezien de pool gelijk is aan de oorsprong  $(0, 0)$  in cartesische coördinaten komt de stelling in dit geval neer op  $0 = 0$ . Het volgende voorbeeld past Stelling 11.1 toe.

### Voorbeeld 11.1

Druk elk van de volgende punten in cartesische coördinaten uit in poolcoördinaten met  $r \geq 0$  en  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

1.  $P(2, -2\sqrt{3})$

2.  $R(0, -3)$

---

#### Oplossing

---

1. Het punt  $P(2, -2\sqrt{3})$  ligt in het vierde kwadrant. Met  $x = 2$  en  $y = -2\sqrt{3}$  verkrijgen we

$$r^2 = x^2 + y^2 = (2)^2 + (-2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 = 16,$$

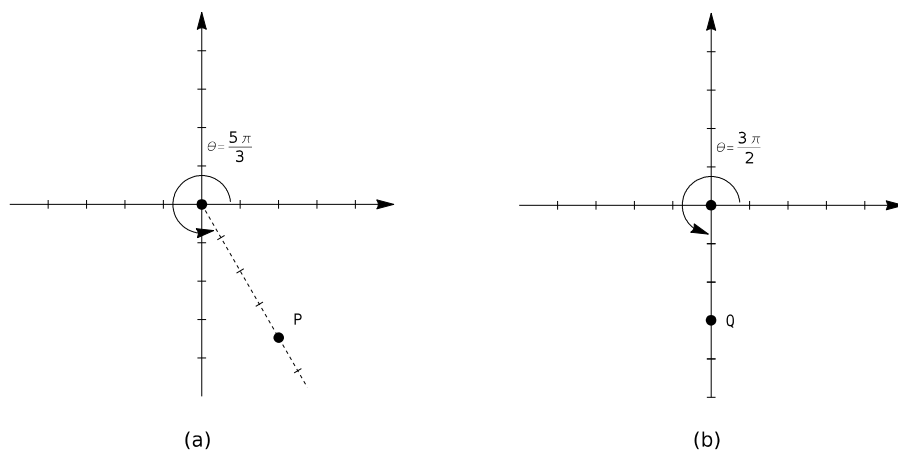
dus  $r = \pm 4$ . Aangezien  $r \geq 0$ , kiezen we  $r = 4$ . Om  $\theta$  te bepalen beschouwen we

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}.$$

Dit zegt ons dat  $\theta$  een referentiehoek van  $-\frac{\pi}{3}$  heeft. Aangezien  $P$  in kwadrant IV ligt weten we dat  $\theta$  hoort bij een hoek in het vierde kwadrant. Vermits  $0 \leq \theta < 2\pi$ , kiezen we  $\theta = \frac{5\pi}{3}$ . Vandaar is ons antwoord  $(4, \frac{5\pi}{3})$  (Figuur 11.2(a)).

2. Het punt  $R(0, -3)$  ligt op de negatieve  $y$ -as. Hoewel we voor de omzetting de gebruikelijke berekeningen zouden kunnen overlopen, kunnen we in dit geval de poolcoördinaten voor  $R$  bepalen met behulp van de definitie. We zien dat  $R$  zich 3 eenheden van de oorsprong bevindt. Dit betekent dat  $r = \pm 3$ . Aangezien  $r \geq 0$ , kiezen we  $r = 3$ . Wat betreft  $\theta$  voldoet de hoek  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  aan  $0 \leq \theta < 2\pi$  en ligt zijn terminale zijde langs de negatieve  $y$ -as. Ons antwoord is dus  $(3, \frac{3\pi}{2})$  (Figuur 11.2(b)).

Uit het vorige voorbeeld blijkt dat het belangrijk is om te weten in welk kwadrant het bestudeerde punt zich bevindt om de juiste  $\theta$  te kunnen bepalen. In de plaats van hiervoor gebruik te maken van de boogtangensfunctie en dan de juiste hoek uit te kiezen, kunnen we de  $\text{atan2}$ -functie gebruiken (boogtangensfunctie met twee argumenten). Deze functie is gedefinieerd als de hoek in het Euclidische vlak, gegeven in radialen, tussen de positieve  $x$ -as en het lijnstuk tussen de oorsprong en het punt  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Hoeken in tegenwijzerzin zijn positief en die in wijzerzin zijn negatief. Bijgevolg is de  $\text{atan2}(y, x)$  gedefinieerd over het interval  $[0, \pi]$  als  $y > 0$  en over  $]-\pi, 0[$  als  $y < 0$ . De functie wordt



**Figuur 11.2:** De positie van het punt  $P$  met cartesische coördinaten  $(2, -2\sqrt{3})$  en poolcoördinaten  $(4, \frac{5\pi}{3})$  (a) en het punt  $R$  met als cartesische coördinaten  $(0, -3)$  en poolcoördinaten  $(3\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$  (b).

gedefinieerd als:

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & \text{als } x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & \text{als } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & \text{als } x < 0 \wedge y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{als } x = 0 \wedge y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{als } x = 0 \wedge y < 0, \\ \text{niet gedefinieerd,} & \text{als } x = 0 \wedge y = 0. \end{cases} \quad (11.1)$$

We hoeven ons natuurlijk niet te beperken tot punten bij de omzetting van cartesische coördinaten naar poolcoördinaten. We kunnen dit ook doen voor vergelijkingen door gebruik te maken van Stelling 11.1. In poolcoördinaten zullen we uitkomen bij vergelijkingen in de variabelen  $r$  en  $\theta$ . De meest voor de hand liggende manier om cartesische coördinaten om te zetten naar poolcoördinaten is om elke  $x$  te vervangen door  $r \cos(\theta)$  en elke  $y$  te vervangen door  $r \sin(\theta)$ . Vervolgens gebruiken we goniometrische identiteiten om te vereenvoudigen (Hoofdstuk 5). De omzetting van poolcoördinaten naar cartesische coördinaten is evenwel niet zo makkelijk. We kunnen  $r^2 = x^2 + y^2$  oplossen naar  $r$  om te bekomen dat  $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ . Om  $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$  op te lossen, maken we gebruik van de boogtangensfunctie en bekomen  $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi k$  met  $k \in \mathbb{Z}$ . Aangezien geen van deze uitdrukkingen gebruiksvriendelijk is, gaan we over tot een aanpak waarbij we de poolvergelijking zo herschikken tot dat de uitdrukkingen  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $r \cos(\theta) = x$ ,  $r \sin(\theta) = y$  en/of  $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$  verschijnen.

### Voorbeeld 11.2

1. Druk elke vergelijking in cartesische coördinaten uit in poolcoördinaten.

(a)  $(x-3)^2 + y^2 = 9$

(b)  $y = -x$

2. Druk elke vergelijking in poolcoördinaten uit in cartesische coördinaten.



- (a)  $r = -3$   
 (b)  $r = 1 - \cos(\theta)$

---

 Oplossing
 

---

1. (a) We starten door  $x = r \cos(\theta)$  en  $y = r \sin(\theta)$  te substitueren in  $(x-3)^2 + y^2 = 9$  en de bekomen uitdrukking te vereenvoudigen. We volgen onze wiskundige intuïtie en kijken waar deze ons brengt.

$$\begin{aligned} (r \cos(\theta) - 3)^2 + (r \sin(\theta))^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow r^2 \cos^2(\theta) - 6r \cos(\theta) + 9 + r^2 \sin^2(\theta) &= 9 \\ \Leftrightarrow r^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) - 6r \cos(\theta) &= 0 && \text{(Verminder met 9 in beide leden.)} \\ \Leftrightarrow r^2 - 6r \cos(\theta) &= 0 && \text{(Aangezien } \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.) \\ \Leftrightarrow r(r - 6 \cos(\theta)) &= 0 && \text{(Ontbinden in factoren.)} \end{aligned}$$

We bekomen  $r = 0$  of  $r = 6 \cos(\theta)$ . Uit Sectie 4.4 weten we dat de vergelijking  $(x-3)^2 + y^2 = 9$  een cirkel beschrijft en aangezien  $r = 0$  beschrijft het enkel een punt (namelijk de oorsprong). We kiezen bijgevolg  $r = 6 \cos(\theta)$  als finaal antwoord.

- (b) Substitueer  $x = r \cos(\theta)$  en  $y = r \sin(\theta)$  in  $y = -x$ . Dit geeft  $r \sin(\theta) = -r \cos(\theta)$ . Door te herschikken verkrijgen we  $r \cos(\theta) + r \sin(\theta) = 0$  of  $r(\cos(\theta) + \sin(\theta)) = 0$ . Als we deze laatste vergelijking oplossen naar  $\theta$  bekomen we  $\theta = -\frac{\pi}{4} + \pi k$  met  $k \in \mathbb{Z}$ . We weten dat  $y = -x$  een rechte door de oorsprong beschrijft. Opnieuw stelt  $r = 0$  de oorsprong voor. Beschouw de vergelijking  $\theta = -\frac{\pi}{4}$ . In deze vergelijking kan  $r$  vrij gekozen worden. Als we de punten  $(r, -\frac{\pi}{4})$  aanduiden voor alle mogelijke waarden van  $r$  (positief, negatief en nul), dan verkrijgen we een rechte getekend die de terminale zijde van de hoek  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  bevat. Dit is niets anders dan  $y = -x$ . Vandaar is  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  ons finaal antwoord.
2. (a) Vertrekkende bij  $r = -3$ , kunnen we beide leden kwadrateren. We verkrijgen  $r^2 = (-3)^2$  of  $r^2 = 9$ . We kunnen nu  $r^2 = x^2 + y^2$  substitueren om zo de vergelijking  $x^2 + y^2 = 9$  te bekomen. Zoals we al eerder bespraken, resulteert kwadrateren niet in een equivalente vergelijking. Het probleem is dat de vergelijking  $r^2 = 9$  aan meer punten zou kunnen voldoen dan  $r = -3$ . In het vlak lijkt dit het geval te zijn aangezien  $r^2 = 9$  gelijkwaardig is aan  $r = \pm 3$  en niet enkel aan  $r = -3$ . Ieder punt met poolcoördinaten  $(3, \theta)$  kan echter voorgesteld worden als  $(-3, \theta + \pi)$ . Dit betekent dat elk punt  $(r, \theta)$  waarvan de poolcoördinaten voldoen aan de uitdrukking  $r = \pm 3$  een gelijkwaardige weergave (wat betekent dat ze hetzelfde punt voorstellen) heeft die voldoet aan  $r = -3$ .
- (b) Opnieuw zullen we  $r = 1 - \cos(\theta)$  wat moeten aanpassen, zodat we de omzettingsformules uit Stelling 11.1 kunnen toepassen. We zouden beide leden kunnen kwadrateren zodat we  $r^2$  bekomen in het linkerlid, maar dit zou tot iets onbruikbaar leiden in het rechterlid. In de plaats daarvan vermenigvuldigen we beide leden met  $r$  zodat we  $r^2 = r - r \cos(\theta)$  bekomen. De vergelijking bevat nu  $r^2$  en  $r \cos(\theta)$ , waar we makkelijk mee verder kunnen. Herschrijf de vergelijking als  $r = r^2 + r \cos(\theta)$  en kwadrateer beide leden. We verkrijgen  $r^2 = (r^2 + r \cos(\theta))^2$ . Door  $r^2 = x^2 + y^2$  en  $r \cos(\theta) = x$  te substitueren krijgen we  $x^2 + y^2 = (x^2 + y^2 + x)^2$ . We hebben weer enkele algebraïsche bewerkingen uitgevoerd die de verzameling aan punten beschreven door de originele vergelijking hebben aangepast. Als eerste vermenigvuldigen we beide leden met  $r$ . Dit betekent dat nu ook  $r = 0$  een oplossing is van de vergelijking. In de originele vergelijking  $r = 1 - \cos(\theta)$  zien we dat  $\theta = 0$   $r = 0$  teruggeeft. De vermenigvuldiging met  $r$

introduceert dus geen nieuwe punten.

Ook bij het kwadrateren van de vergelijking moeten we even stilstaan. Zijn er punten met de coördinaten  $(r, \theta)$  die voldoen aan  $r^2 = (r^2 + r \cos(\theta))^2$ , maar niet voldoen aan  $r = r^2 + r \cos(\theta)$ ? Veronderstel dat  $(r', \theta')$  voldoet aan  $r^2 = (r^2 + r \cos(\theta))^2$ . Dan geldt  $r' = \pm \sqrt{(r')^2 + r' \cos(\theta')}$ . Als  $r' = \sqrt{(r')^2 + r' \cos(\theta')}$  is er geen probleem. Wat als  $r' = -\sqrt{(r')^2 + r' \cos(\theta')} = -\sqrt{(r')^2 - r' \cos(\theta')}$ ? We beweren dat de coördinaten  $(-r', \theta' + \pi)$ , wat hetzelfde punt beschrijft als  $(r', \theta')$ , voldoen aan  $r = r^2 + r \cos(\theta)$ . We substitueren  $r' = -r'$  en  $\theta = \theta' + \pi$  in  $r = r^2 + r \cos(\theta)$  om te controleren of de bekomen uitdrukking waar is.

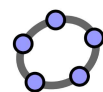
$$\begin{aligned} -r' &\stackrel{?}{=} \sqrt{(-r')^2 + (-r' \cos(\theta' + \pi))} \\ \Leftrightarrow -\sqrt{-(r')^2 - r' \cos(\theta')} &\stackrel{?}{=} \sqrt{(r')^2 - r' \cos(\theta' + \pi)} && (r' = -\sqrt{(r')^2 - r' \cos(\theta')}) \\ \Leftrightarrow \sqrt{(r')^2 + r' \cos(\theta')} &\stackrel{?}{=} \sqrt{(r')^2 - r'(-\cos(\theta'))} && (\cos(\theta' + \pi) = -\cos(\theta')) \\ \Leftrightarrow \sqrt{(r')^2 + r' \cos(\theta')} &\stackrel{\checkmark}{=} \sqrt{(r')^2 + r' \cos(\theta')} \end{aligned}$$

Aangezien beide leden gelijk zijn, voldoet  $(-r', \theta' + \pi)$  aan  $r = r^2 + r \cos(\theta)$ , wat betekent dat elk punt dat voldoet aan  $r^2 = (r^2 + r \cos(\theta))^2$  ook voldoet aan  $r = r^2 + r \cos(\theta)$ . We moeten dus verder geen aanpassingen meer doen.

In de praktijk wordt de controle van de equivalentie van vergelijkingen zoals in Voorbeeld 11.2 vaak niet vermeld. In sommige cursussen gebeurt het kwadrateren van vergelijkingen zoals  $r = -3$  om  $r^2 = 9$  te bekomen inderdaad zonder enige bedenking. Als er iets is wat je moet onthouden uit Voorbeeld 11.2 is het wel dat relatief mooie uitdrukkingen in cartesische coördinaten zoals  $y = x^2$  kunnen resulteren in omslachtige uitdrukkingen in poolcoördinaten en omgekeerd.

### 11.1.3 Grafieken van poolvergelijkingen

Nu poolcoördinaten en -vergelijkingen werden geïntroduceerd, bespreken we nu de grafieken van poolvergelijkingen in het cartesisch coördinatenstelsel. Aangezien elk punt in het vlak oneindig veel weergaven heeft in poolcoördinaten, beschouwen we het volgende grondbeginsel.



#### Definitie 11.1 (Grafiek van een poolvergelijking)

De grafiek van een vergelijking in poolcoördinaten is de verzameling van punten die voldoet aan de vergelijking. Concreet behoort een punt  $P$  tot de grafiek van een vergelijking als en slechts als er een weergave bestaat van  $P$ , weergegeven als  $(\tilde{r}, \tilde{\theta})$ , zodat  $\tilde{r}$  en  $\tilde{\theta}$  voldoen aan de vergelijking.

Het eerste voorbeeld behandelt enkele eenvoudige poolvergelijkingen.

#### Voorbeeld 11.3

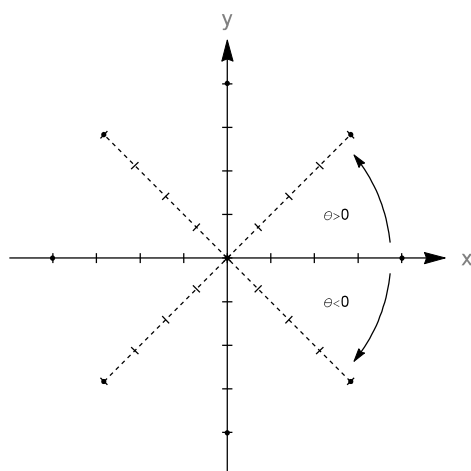
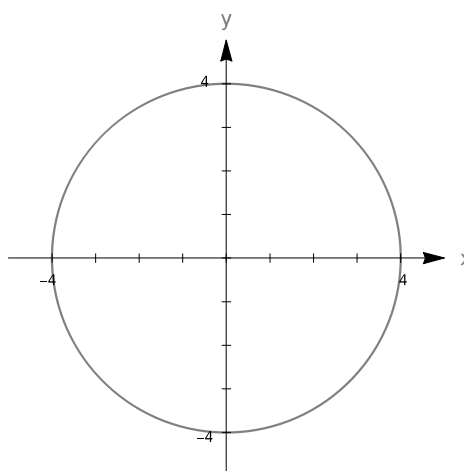
Schets de grafieken van de volgende poolvergelijkingen.

1.  $r = 4$

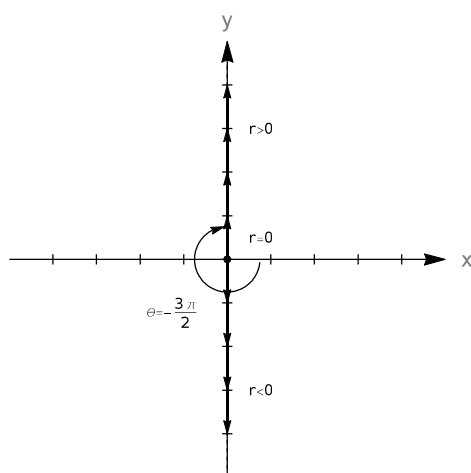
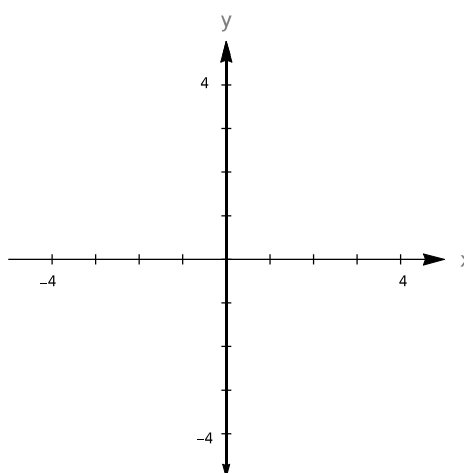
2.  $\theta = -\frac{3\pi}{2}$

## Oplossing

1. In deze vergelijking is  $\theta$  een vrije variabele. De grafiek omvat daarom alle punten met poolcoördinaten  $(4, \theta)$ , ongeacht de keuze van  $\theta$  (Figuur 11.3(a)). Grafisch vertaalt zich dit naar alle punten die zich op 4 eenheden van de oorsprong bevinden. Dit is exact de definitie van een cirkel met de oorsprong als middelpunt en een straal gelijk aan 4 (Figuur 11.3(b)).

(a) In  $r = 4$ , is  $\theta$  een vrije variabele.(b) De grafiek van  $r = 4$ .**Figuur 11.3:** Opbouwen van de grafiek van  $r = 4$ .

2. Hier is  $r$  een vrije variabele (Figuur 11.4(a)). Door  $(r, -\frac{3\pi}{2})$  aan te duiden voor verschillende waarden van  $r$  zien we dat we de  $y$ -as aan het tekenen zijn (Figuur 11.4(b)).

(a) In  $\theta = -\frac{3\pi}{2}$ , is  $r$  een vrije variabele.(b) De grafiek van  $\theta = -\frac{3\pi}{2}$ .**Figuur 11.4:** Opbouw van de grafiek van  $\theta = -\frac{3\pi}{2}$ .

Onze ervaring uit Voorbeeld 11.3 leert ons het volgende.

- De grafiek van de poolvergelijking  $r = a$  is een cirkel met de oorsprong als middelpunt en straal

gelijk aan  $|\alpha|$ .

- De grafiek van de poolvergelijking  $\theta = \alpha$  is een rechte die de terminale zijde van  $\alpha$  omvat indien deze getekend wordt in zijn standaardpositie.

Aangezien het veel ingewikkelder wordt om de grafieken van meer algemene poolvergelijkingen te construeren, zullen we daarvoor Python gebruiken. Dit programma stelt ons in staat om bijvoorbeeld snijpunten van de grafieken van meervoudige poolvergelijkingen analytisch te controleren.

### Voorbeeld 11.4

Schets de volgende poolvergelijkingen.

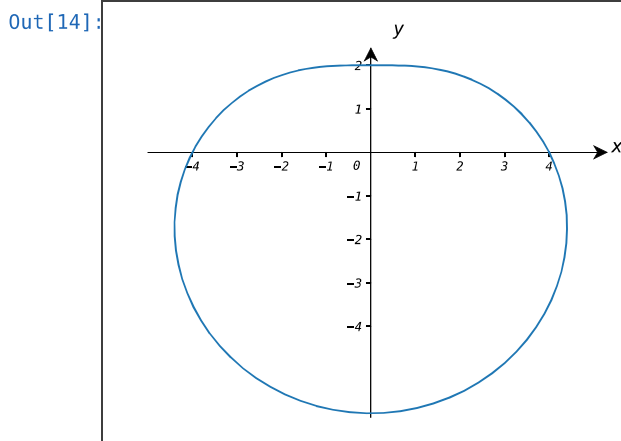
1.  $r = 4 - 2 \sin(\theta)$

2.  $r^2 = 16 \cos(2\theta)$

#### Oplossing

1. We gaan in Python aan de slag met behulp van de volgende instructies. We kiezen er hier voor om de assen te benoemen.

```
In [14]: from sympy import symbols, diff, symbols, sin
from sympy.plotting import plot_parametric
theta = symbols('theta')
r = 4-2*sin(theta)
plot_parametric((r*cos(theta), r*sin(theta)), (theta, 0, 2*pi), xlabel="x",
ylabel="y")
```



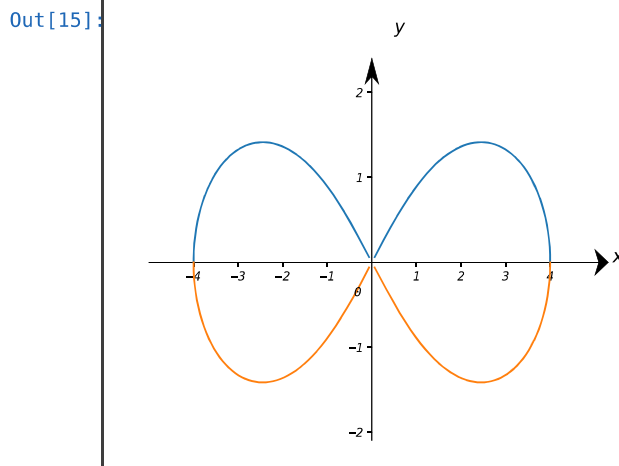
Merk op dat we hier kiezen om  $\theta$  te laten variëren tussen 0 en  $2\pi$ , omdat  $2\pi$  de periode is van de betrokken poolvergelijking.

2. De grafiek van  $r^2 = 16 \cos(2\theta)$  bepalen is ingewikkeld omwille van de  $r^2$ , dus we zetten de vergelijking om naar

$$r = \pm \sqrt{16 \cos(2\theta)} = \pm 4 \sqrt{\cos(2\theta)}.$$

Aangezien de periode van de betrokken cosinus  $\pi$  is, plotten we beide functies tegelijk door gebruik te maken van `plot_parametric` met  $\theta \in [0, \pi]$ .

```
In [15]: from sympy import symbols, diff, symbols, sin, cos, sqrt
from sympy.plotting import plot_parametric
theta = symbols('theta')
r1 = 4*sqrt(cos(2*theta))
r2 = -4*sqrt(cos(2*theta))
fig = plot_parametric((r1*cos(theta), r1*sin(theta)), (theta, 0, pi), xlabel="x",
ylabel="y", show=False, line_color="blue")
fig2 = plot_parametric((r2*cos(theta), r2*sin(theta)), (theta, 0, pi), xlabel="x",
ylabel="y", show=False, line_color="orange")
fig.append(fig2[0])
fig.show()
```



Merk ook op dat dat we ook waarden voor  $\theta$  zouden kunnen plotten buiten het interval  $[0, \pi]$ , maar dan zullen we delen van de kromme terugvinden die reeds aanwezig zijn.

Het vorige voorbeeld doet ons de symmetrie appreciëren die vaak voorkomt bij de grafieken van poolvergelijkingen. We kunnen inderdaad nagaan dat  $r = f(\theta)$  symmetrisch is rond de  $x$ -as als  $f$  even is, want dan geldt dat  $f(\theta) = f(-\theta)$  (bijv. Voorbeeld 11.4.2), symmetrisch is rond de  $y$ -as als  $f(\pi - \theta) = f(\theta)$  (bijv. Voorbeeld 11.4.1 en 2) en symmetrisch is rond de oorsprong als  $f$  oneven is, omdat dan geldt dat  $f(-\theta) = -f(\theta)$  (bijv. Voorbeeld 11.4.2). Naast deze gebruikelijke vormen van symmetrie kunnen we het ook hebben over rotatiesymmetrie. Concreet, als  $f(\theta - \alpha) = f(\theta)$  vertoont  $\alpha$  rotatiesymmetrie in wijzerzin en tegenwijzerzin rond de pool.

In het volgende voorbeeld zullen we op zoek gaan naar de snijpunten van poolkrommen.

### Voorbeeld 11.5

Bepaal de snijpunten van de grafieken van de volgende poolvergelijkingen.

1.  $r = 2 \sin(\theta)$  en  $r = 2 - 2 \sin(\theta)$
2.  $r = 3$  en  $r = 6 \cos(2\theta)$

---

#### Oplossing

1. We proberen eerst elk punt te bepalen dat een enkele weergave  $P(r, \theta)$  heeft die voldoet aan beide vergelijkingen. Wanneer we er vanuit gaan dat zo een koppel  $(r, \theta)$  bestaat, dan geeft het gelijkstellen van beide vergelijkingen voor  $r$

$$2 \sin(\theta) = 2 - 2 \sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ of } \theta = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

met  $k \in \mathbb{Z}$ . Door  $\theta = \frac{\pi}{6}$  in te vullen in  $r = 2 \sin(\theta)$  bekomen we  $r = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ , wat ook de waarde is die we verkrijgen indien we  $\theta$  substitueren in  $r = 2 - 2 \sin(\theta)$ . Vandaar dat  $\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$  een weergave is voor het snijpunt in kwadrant I. Voor het snijpunt in kwadrant II proberen we  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ . Beide vergelijkingen geven het punt  $\left(1, \frac{5\pi}{6}\right)$  terug, dus dit is ons antwoord. Laat ons nu grafisch controleren of we alle snijpunten van de grafieken van de betrokken poolvergelijkingen hebben gevonden (Figuur 11.5(a)).

Op basis van de grafieken lijkt het dat er drie snijpunten zijn: één in kwadrant I, één in kwadrant II en één in de oorsprong. Dus, hoe bepalen we dit laatste algebraïsch? We weten dat de pool voorgesteld kan worden door  $(0, \theta)$ , ongeacht  $\theta$ . In de grafiek van  $r = 2 \sin(\theta)$  vertrekken we bij de oorsprong wanneer  $\theta = 0$  en keren we er terug bij  $\theta = \pi$ . Eigenlijk bevinden we ons exact in de oorsprong bij  $\theta = \pi k$  met  $k \in \mathbb{Z}$ . Voor de kromme  $r = 2 - 2 \sin(\theta)$  bereiken we de oorsprong echter wanneer  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , en meer algemeen, wanneer  $\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$  met  $k \in \mathbb{Z}$ . Er is geen gehele waarde voor  $k$  waarvoor  $\pi k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ . Dit betekent dat, hoewel de oorsprong tot beide grafieken behoort, dit punt niet voor dezelfde  $\theta$  bereikt wordt. Hoe dan ook hebben we de drie snijpunten bepaald, namelijk  $\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$ ,  $\left(1, \frac{5\pi}{6}\right)$  en de oorsprong.

2. Laat ons de grafieken schetsen om een idee te krijgen van het aantal snijpunten en wat hun ligging is. De grafiek van  $r = 3$  is een cirkel met als middelpunt de oorsprong en straal gelijk aan 3. De tweede grafiek beschrijft een quadrifolium (Figuur 11.5(b)).

Het lijkt alsof er acht snijpunten zijn, twee in elk kwadrant. We kijken eerst of er punten  $P(r, \theta)$  zijn waarvan de weergave voldoet aan beide vergelijkingen. Voor deze punten geldt,

$$\begin{aligned} 6 \cos(2\theta) = 3 &\Leftrightarrow \cos(2\theta) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \pi k \text{ of } \theta = \frac{5\pi}{6} + \pi k \end{aligned}$$

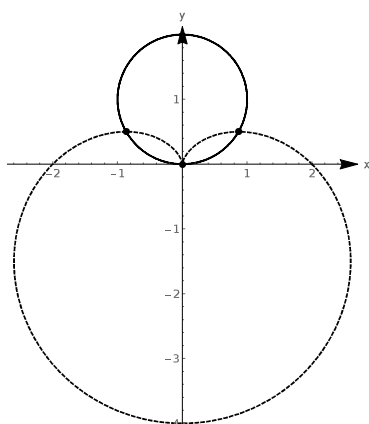
met  $k \in \mathbb{Z}$ . Uit al deze punten bekomen we slechts vier afzonderlijke punten voorgesteld door  $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ ,  $\left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$ ,  $\left(3, \frac{7\pi}{6}\right)$  en  $\left(3, \frac{11\pi}{6}\right)$ . Om de coördinaten van de resterende vier punten te bekomen, bedenken we op welke manier de weergave van de snijpunten kan verschillen. We weten uit het begin van deze sectie dat als  $(r, \theta)$  en  $(r', \theta')$  hetzelfde punt voorstellen en  $r \neq 0$  er dan geldt dat  $r = r'$  of  $r = -r'$ . Als  $r = r'$ , dan is  $\theta' = \theta + 2\pi k$ . Een mogelijkheid is dus dat het snijpunt  $P$  een weergave  $(r, \theta)$  heeft die voldoet aan  $r = 3$  en een andere weergave die voldoet aan  $r = 6 \cos(2\theta)$ . We vervangen nu elke  $\theta$  in vergelijking  $r = 6 \cos(2\theta)$  door  $(\theta + 2\pi k)$  en gaan na of we, bij het oplossen naar  $r$ , meer oplossingen voor  $\theta$  bekomen. Er geldt dat  $\cos(2(\theta + 2\pi k)) = \cos(2\theta + 4\pi k) = \cos(2\theta)$  voor  $k \in \mathbb{Z}$ . De vergelijking  $r = 6 \cos(2(\theta + 2\pi k))$  reduceert zich echter opnieuw tot  $r = 6 \cos(2\theta)$ . Dit betekent dat we geen extra oplossingen bekomen.

We gaan verder met het geval waarvoor  $r = -r'$ . Er geldt dat  $\theta' = \theta + (2k + 1)\pi$  met  $k \in \mathbb{Z}$ . We kijken of we punten  $P$  kunnen bepalen met als weergave  $(r, \theta)$  die voldoet aan  $r = 3$  en een andere weergave  $(-r, \theta + (2k + 1)\pi)$  die voldoet aan  $r = 6 \cos(2\theta)$ . Hiertoe vervangen we  $r$  door  $-r$  en  $\theta$  door  $(\theta + (2k + 1)\pi)$  in de vergelijking  $r = 6 \cos(2\theta)$  en bekomen we  $-r = 6 \cos(2(\theta + (2k + 1)\pi))$ . Aangezien  $\cos(2(\theta + (2k + 1)\pi)) = \cos(2\theta + (2k + 1)(2\pi)) = \cos(2\theta)$  voor  $k \in \mathbb{Z}$ , reduceert de vergelijking  $-r = 6 \cos(2(\theta + (2k + 1)\pi))$  zich tot  $-r = 6 \cos(2\theta)$  of  $r = -6 \cos(2\theta)$ . Door dit samen te voegen met  $r = 3$  verkrijgen we

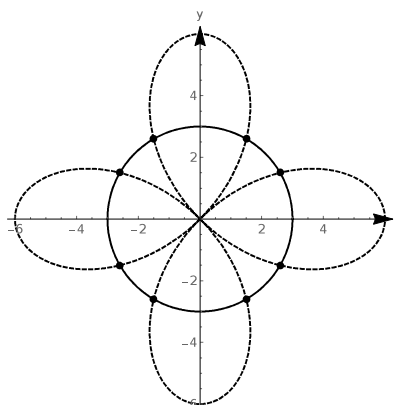
$$-6 \cos(2\theta) = 3 \Leftrightarrow \cos(2\theta) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \pi k \text{ of } \theta = \frac{2\pi}{3} + \pi k$$

Hieruit bekomen we de overige snijpunten:  $(-3, \frac{\pi}{3})$ ,  $(-3, \frac{2\pi}{3})$ ,  $(-3, \frac{4\pi}{3})$  en  $(-3, \frac{5\pi}{3})$ .



(a)  $r = 2 \sin(\theta)$  (volle lijn) en  $r = 2 - 2 \sin(\theta)$  (stippellijn).



(b)  $r = 3$  (volle lijn) en  $r = 6 \cos(2\theta)$  (stippellijn).

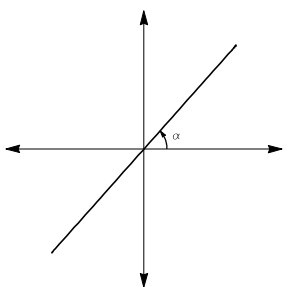
**Figuur 11.5:** Snijpunten van grafieken van twee poolvergelijkingen.

Er zijn een aantal eenvoudige en klassieke poolvergelijkingen die bekend zijn omwille van hun schoonheid en/of toepasbaarheid. Daarom eindigt deze sectie met een beknopt overzicht van deze grafieken. Van rechten en cirkels wordt kennis van de poolvergelijkingen verondersteld.

## Rechten

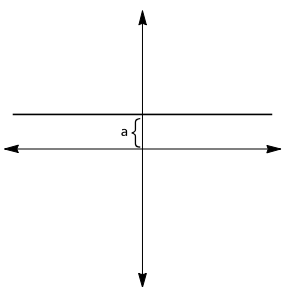
**Door de oorsprong:**

$$\theta = \alpha$$



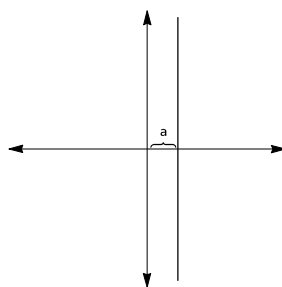
**Horizontale rechte:**

$$r = a \csc(\theta)$$



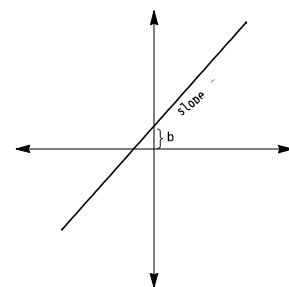
**Verticale rechte:**

$$r = a \sec(\theta)$$



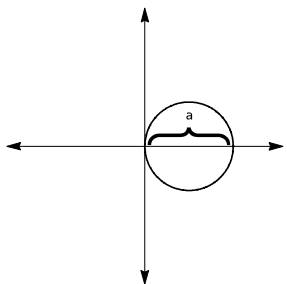
**Niet door de oorsprong:**

$$r = \frac{b}{\sin(\theta) - m \cos(\theta)}$$

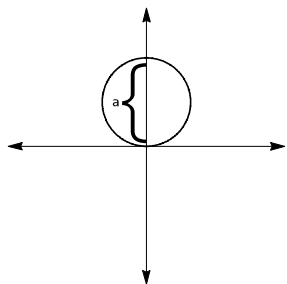


**Cirkels****Spiralen****Middelpunt op x-as:**

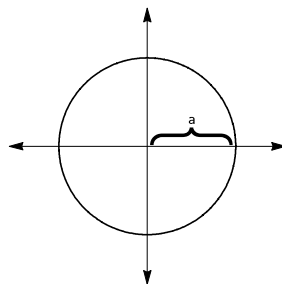
$$r = a \cos(\theta)$$

**Middelpunt op y-as:**

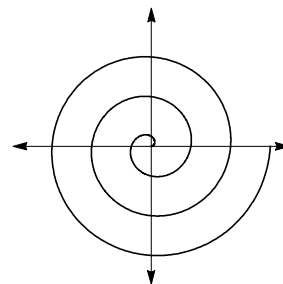
$$r = a \sin(\theta)$$

**Middelpunt in oorsprong:**

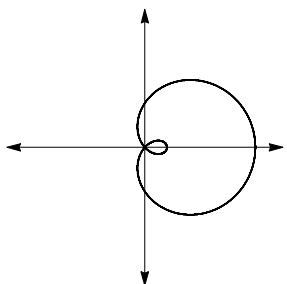
$$r = a$$

**Archimedes-spiraal:**

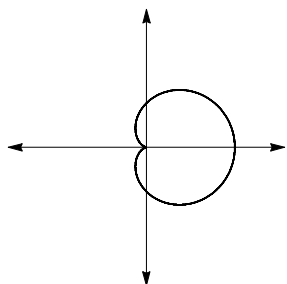
$$r = \theta$$

**Limaçons**Symmetrisch rond de x-as:  $r = a \pm b \cos(\theta)$ ; Symmetrisch rond de y-as:  $r = a \pm b \sin(\theta)$ ;  $a, b > 0$ **Met inwendige lus:**

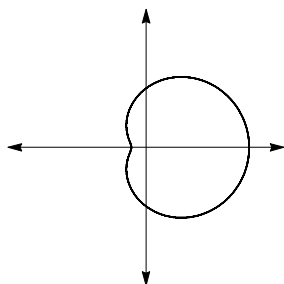
$$\frac{a}{b} < 1$$

**Cardioïde:**

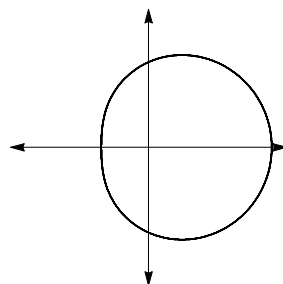
$$\frac{a}{b} = 1$$

**Gedeukt:**

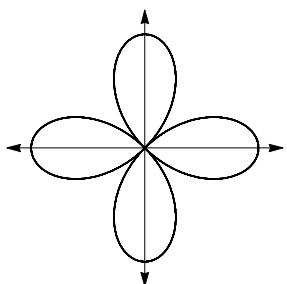
$$1 < \frac{a}{b} < 2$$

**Convex:**

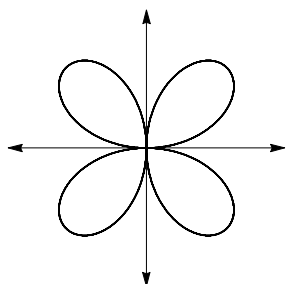
$$\frac{a}{b} > 2$$

**Rooskrommen**Symmetrisch rond de x-as:  $r = a \cos(n\theta)$ ; Symmetrisch rond de y-as:  $r = a \sin(n\theta)$ Kromme bevat  $2n$  blaadjes wanneer  $n$  even is en  $n$  blaadjes wanneer  $n$  oneven is.

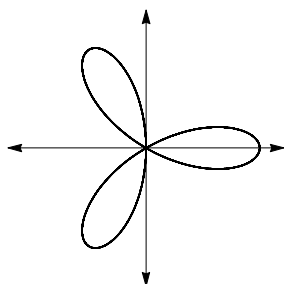
$$r = a \cos(2\theta)$$



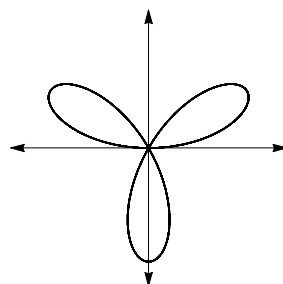
$$r = a \sin(2\theta)$$



$$r = a \cos(3\theta)$$



$$r = a \sin(3\theta)$$

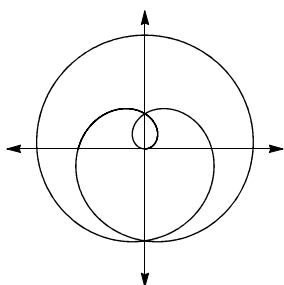




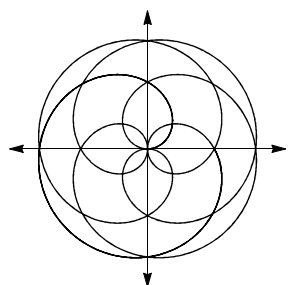
## Speciale krommen

### Rooskrommen

$$r = a \sin(\theta/5)$$

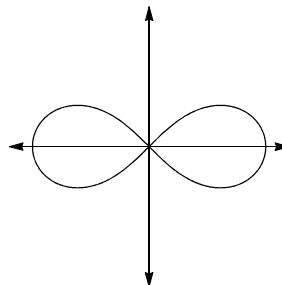


$$r = a \sin(2\theta/5)$$



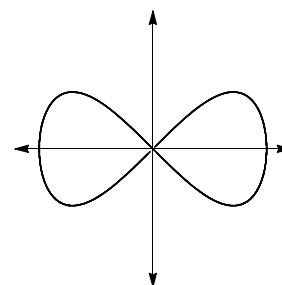
### Lemniscaat:

$$r^2 = a^2 \cos(2\theta)$$



### Achtkromme:

$$r^2 = a^2 \sec^4(\theta) \cos(2\theta)$$



## 11.2 Parametervergelijkingen

### 11.2.1 Definitie

Zoals we gezien hebben in Sectie 11.1 zijn er interessante krommen die, wanneer ze geplotted worden in het  $xy$ -vlak, noch  $y$  als een functie van  $x$  noch  $x$  als een functie van  $y$  weergeven. Hier stellen we een nieuw soort concept voor dat ons toelaat deze krommen te bestuderen aan de hand van functies. Om het principe te introduceren, stellen we ons een insect voor dat over een tafel kruipt. Het vertrekt in het punt  $O$  en legt zo een pad  $C$  af in het vlak (Figuur 11.6).



De kromme  $C$  kan niet geschreven worden als een functie van  $x$ , omdat ze niet voldoet aan de verticale rechte test en evenmin  $x$  als een functie van  $y$  aangezien ze niet voldoet aan de horizontale rechte test. Aangezien het insect zich echter maar op één plaats  $P(x, y)$  kan bevinden op een gegeven tijdstip, kunnen we de  $x$ -coördinaat van  $P$  schrijven als een functie van  $t$  en de  $y$ -coördinaat van  $P$  als een andere functie van  $t$ . De onafhankelijke variabele  $t$  wordt in dit geval een **parameter** (*parameter*) genoemd. Het stelsel van vergelijkingen

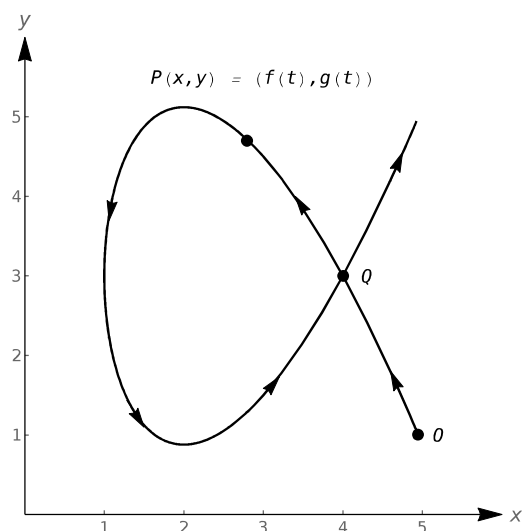
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

wordt een **stelsel parametervergelijkingen** (*system of parametric equations*) genoemd of een **parametervoorstelling** (*parametrization*) van de kromme  $C$ .

De parametervoorstelling van  $C$  definieert een **zin** of **oriëntatie** (*orientation*), de pijl op  $C$  geeft de zin aan voor stijgende waarde van  $t$ . In dit geval vertrekt het insect in het punt  $O$  en beweegt het links naar boven om dan naar beneden te krullen en zijn pad te kruisen in het punt  $Q$ . Uiteindelijk eindigt het in kwadrant I. Het is belangrijk op te merken dat de kromme zelf een verzameling van punten is en dus geen enkele oriëntatie met zich meedraagt. Het is de parametervoorstelling die ervoor zorgt dat deze zin gedefinieerd wordt en verschillende parametervoorstellingen kunnen verschillende oriëntaties meegeven. Het stelsel

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$$

is de parametervoorstelling van de eenheidscirkel, die tegen de wijzers van de klok in wordt doorlopen. Meer algemeen stelt het stelsel (Stelling 5.5)



**Figuur 11.6:** Een insect dat een kromme  $C$  in het vlak aflegt.

$$\begin{cases} x = r \cos(\omega t) \\ y = r \sin(\omega t) \end{cases}$$

de parametervergelijkingen voor van een cirkel met straal  $r$  en de oorsprong als middelpunt. Als  $\omega > 0$ , is de zin tegenwijzerzin en als  $\omega < 0$  is de zin wijzerzin. De hoekfrequentie  $\omega$  bepaalt hoe snel het object op de cirkel beweegt.

### 11.2.2 Grafieken van parametervergelijkingen

Parametervergelijkingen kunnen vrij eenvoudig grafisch voorgesteld worden omdat we simpelweg punten voor  $t$  kunnen kiezen, de overeenkomstige punten kunnen aanduiden en ze kunnen verbinden. Beschouw bijvoorbeeld het volgende stelsel parametervergelijkingen:

$$\begin{cases} x = t^2 - 3 \\ y = 2t - 1 \end{cases} \quad (11.2)$$

met  $t \geq -2$ .

Aangezien we weten dat  $t \geq -2$ , vertrekken we bij  $t = -2$  en beschouwen we  $x(t)$  en  $y(t)$ . Dit geeft ons de volgende waarden:

$t$	$x(t)$	$y(t)$
-2	1	-5
-1	-2	-3
0	-3	-1
1	-2	1
2	1	3
3	6	5

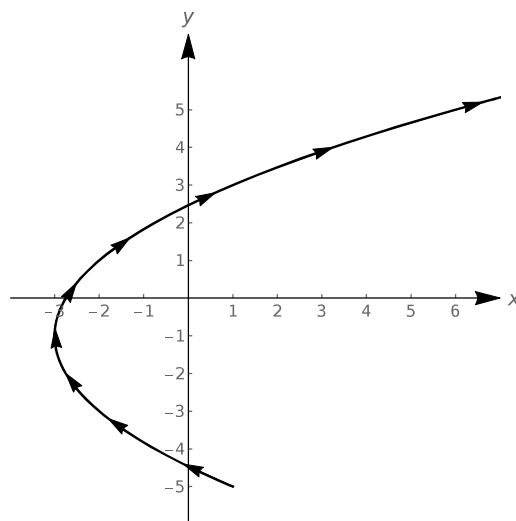
We plotten deze punten achtereenvolgens in Figuur 11.7 en duiden, voor stijgende waarden van  $t$ , de zin van de kromme aan met een pijl. De kromme lijkt op een parabool. Om dit aan te tonen, lossen we de vergelijking  $y = 2t - 1$  op naar  $t$  en krijgen we  $t = \frac{y+1}{2}$ . Door dit te substitueren in de vergelijking  $x = t^2 - 3$  bekomen we

$$x = \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 - 3$$

of na herschikking

$$(y+1)^2 = 4(x+3). \quad (11.3)$$

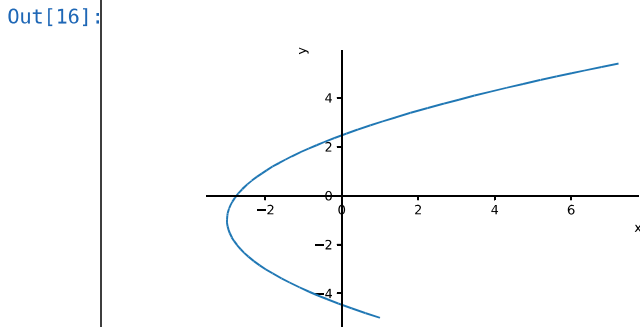
De grafiek van deze vergelijking is een parabool die naar rechts opent en als top  $(-3, -1)$  heeft. Technisch gesproken beschrijft Vergelijking (11.3) een volledige parabool, terwijl de parametervergelijking (Vergelijking (11.2)) met  $t \geq -2$  slechts een deel van de parabool beschrijft. In dit geval kunnen we dit oplossen door de grenzen voor  $y$  af te bakenen. Aangezien het gewenste deel van de parabool exact het deel is waarvoor  $y \geq -5$ , geeft Vergelijking (11.3) tezamen met de beperking  $y \geq -5$  exact dezelfde kromme als deze gegeven door de parametervergelijking. Het enige stuk informatie dat we nooit kunnen terugwinnen na het elimineren van de parameter is de oriëntatie van de kromme.



**Figuur 11.7:** De kromme gegeven door Vergelijking (11.2).

In Python kunnen we gebruikmaken van de functie `plot_parametric` om de grafiek van een parametervergelijking te construeren. Voor Vergelijk (11.2) kan dit als volgt gerealiseerd worden.

```
In [16]: from sympy import symbols
from sympy.plotting import plot_parametric
t = symbols('t')
x = t**2 - 3
y = 2*t - 1
plot_parametric((x, y), (t, -2, 3.2), xlabel="x", ylabel="y")
```



### Voorbeeld 11.6

Schets de grafiek van de volgende parametervergelijkingen.

$$1. \begin{cases} x = t^3 \\ y = 2t^2, \end{cases}$$

met  $-1 \leq t \leq 1$

$$2. \begin{cases} x = 1 + 3 \cos(t) \\ y = 2 \sin(t), \end{cases}$$

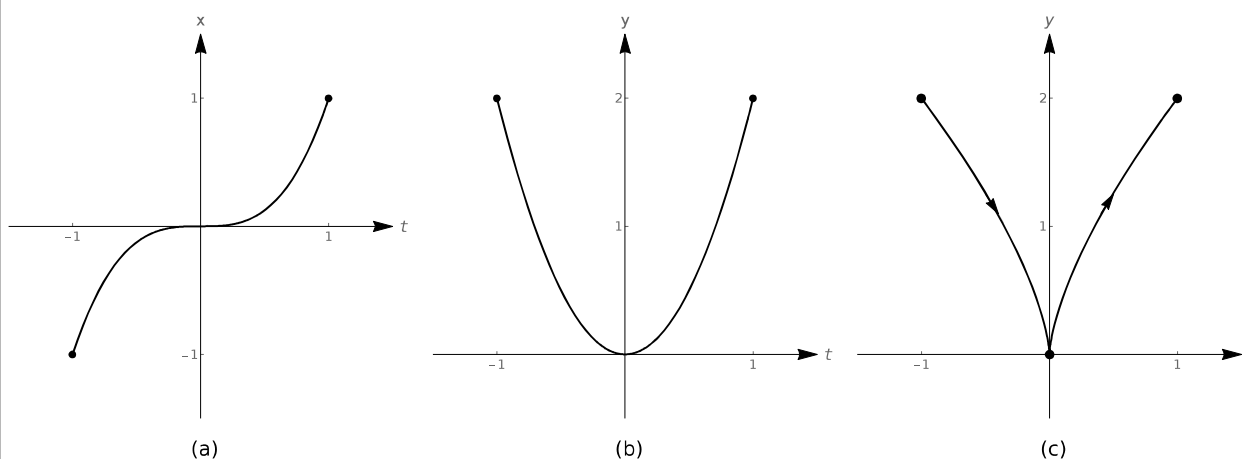
met  $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$

---

#### Oplossing

---

- We schetsen eerst de grafieken van  $x = t^3$  en  $y = 2t^2$  over het interval  $[-1, 1]$  (Figuur 11.8(a) en 11.8(b)). We merken op dat als  $t$  waarden aanneemt in  $[-1, 1]$ , de grafiek van  $x = t^3$  een bereik heeft van  $[-1, 1]$  en  $y = 2t^2$  een bereik heeft van  $[0, 2]$ . Dit betekent dat de grafiek zich binnen een deel van een vlak bevindt, namelijk  $\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ . We duiden nu enkele punten aan.  $t = -1$  en  $t = 1$  zijn goede waarden om uit te kiezen aangezien dit de extreme waarden voor  $t$  zijn. We kiezen ook  $t = 0$  omdat dit een relatief minimum is in de grafiek van  $y = 2t^2$ .  $t = -1$  invullen levert het punt  $(-1, 2)$ ,  $t = 0$  levert  $(0, 0)$  en  $t = 1$  levert  $(1, 2)$ . Meer algemeen, zien we dat  $x = t^3$  stijgt over zijn volledige interval, terwijl  $y = 2t^2$  daalt over  $[-1, 0]$  en dan stijgt over  $[0, 1]$ . Meetkundig gezien starten we in  $(-1, 2)$  (met  $t = -1$ ), bewegen we naar rechts (want  $x$  stijgt) en naar onder (want  $y$  daalt) tot  $(0, 0)$  (met  $t = 0$ ). We bewegen ons verder naar rechts (want  $x$  stijgt), maar nu verplaatsen we ons naar boven (want  $y$  stijgt) totdat we  $(1, 2)$  bereiken (met  $t = 1$ ). Als laatste elimineren we de parameter. Door  $x = t^3$  op te lossen naar  $t$  krijgen we  $t = \sqrt[3]{x}$ . Substitueren we dit in  $y = 2t^2$  dan levert dit  $y = 2(\sqrt[3]{x})^2 = 2x^{2/3}$ . De uiteindelijke grafiek is weergegeven in Figuur 11.8(c).



**Figuur 11.8:** De grafiek van  $x = t^3$  (a),  $y = 2t^2$  (b) en  $x = t^3$ ,  $y = 2t^2$  (c) met  $-1 \leq t \leq 1$ .

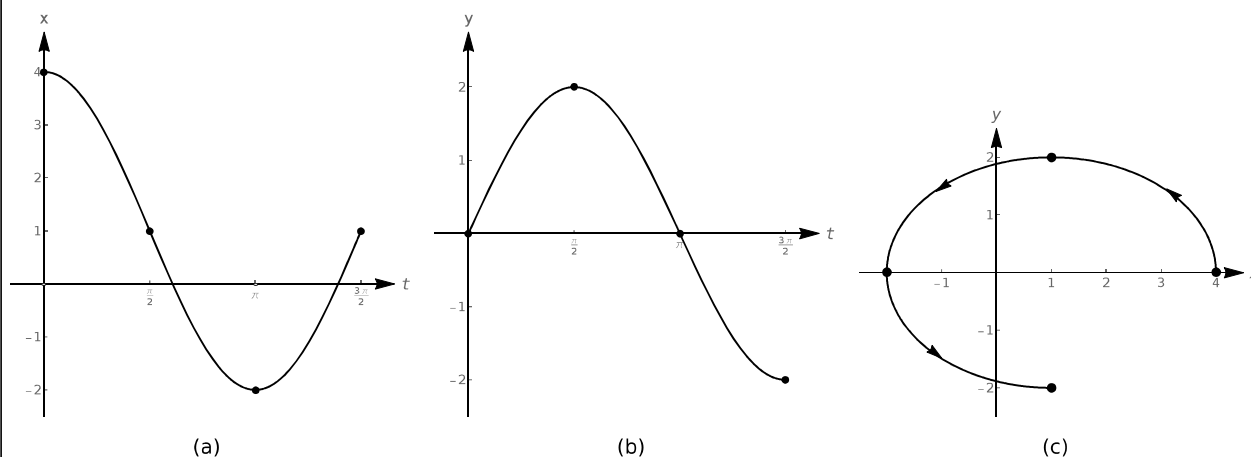
2. Als we te werk gaan zoals hierboven schetsen we de grafiek van dit stelsel door eerst  $x = 1 + 3 \cos(t)$  en  $y = 2 \sin(t)$  grafisch voor te stellen over het interval  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  (Figuren 11.9(a) en 11.9(b)). We zien dat  $x$  varieert van  $-2$  tot  $4$  en  $y$  varieert van  $-2$  tot  $2$ . Invullen van  $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$  en  $\frac{3\pi}{2}$  levert respectievelijk de punten  $(4, 0)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(-2, 0)$  en  $(1, -2)$ . Als  $t$  varieert van  $0$  tot  $\frac{\pi}{2}$ , daalt  $x = 1 + 3 \cos(t)$  terwijl  $y = 2 \sin(t)$  stijgt. Dit betekent dat we de kromme construeren door te vertrekken in  $(4, 0)$  en verder naar linksboven bewegen tot in  $(1, 2)$ . Als  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ , dalen  $x$  en  $y$ , dus bewegen we ons nog steeds van rechts naar links, maar we gaan nu naar onder van  $(1, 2)$  tot  $(-2, 0)$ . Over het interval  $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$  begint  $x$  te stijgen terwijl  $y$  blijft dalen. De beweging gaat nu dus van links naar rechts en daalt nog steeds om zo  $(-2, 0)$  met  $(1, -2)$  te verbinden. Om de parameter te elimineren gebruiken we de stelling van Pythagoras. We lossen  $x = 1 + 3 \cos(t)$  op naar  $\cos(t)$  om  $\cos(t) = \frac{x-1}{3}$  te bekomen en lossen  $y = 2 \sin(t)$  op naar  $\sin(t)$  om  $\sin(t) = \frac{y}{2}$  te bekomen. Substitueren van deze uitdrukkingen in  $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$  levert

$$\left(\frac{x-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1,$$

of

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

De grafiek van deze vergelijking is een ellips met als middelpunt  $(1, 0)$  en als toppen  $(-2, 0)$  en  $(4, 0)$  op de grote as. Deze parametervergelijking beschrijft driekwart van de ellips en deze wordt tegenwijzerzin doorlopen (Figuur 11.9(c)).



**Figuur 11.9:** De grafiek van  $x = 1 + 3 \cos(t)$  (a),  $y = 2 \sin(t)$  (b) en  $x = 1 + 3 \cos(t)$ ,  $y = 2 \sin(t)$  (c) met  $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ .

### 11.2.3 Parametriseren van krommen



Nu we hebben geleerd hoe we de grafieken van parametervergelijkingen kunnen construeren, staan we stil bij het bepalen van de parametervergelijkingen van een kromme. Hiertoe hebben we de volgende richtlijnen.

- Om  $y = f(x)$  te parametriseren, met  $x \in I$ , stel  $x = t$  en  $y = f(t)$  met  $t \in I$ .
- Om  $x = g(y)$  te parametriseren, met  $y \in I$ , stel  $y = t$  en  $x = g(t)$  met  $t \in I$ .
- Om een georiënteerd lijnstuk te parametriseren met als aangrijpingspunt  $(x_0, y_0)$  en als eindpunt  $(x_1, y_1)$ , stel  $x = x_0 + (x_1 - x_0)t$  en  $y = y_0 + (y_1 - y_0)t$  met  $0 \leq t \leq 1$ .
- Om  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$  te parametriseren, met  $a, b > 0$ , stel  $x = x_0 + a \cos(t)$  en  $y = y_0 + b \sin(t)$  met  $0 \leq t < 2\pi$ .

#### Voorbeeld 11.7

Parametriseer de onderstaande krommen.

1.  $y = x^2$  van  $x = -3$  tot  $x = 2$ .
2. Het lijnstuk dat start in  $(2, -3)$  en eindigt in  $(1, 5)$ .
3. De cirkel  $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$ .
4. De linkerhelft van de ellips

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

---

Oplossing

---

1. Aangezien  $y = x^2$  geschreven staat in de vorm  $y = f(x)$ , stellen we  $x = t$  en  $y = f(t) = t^2$ .

Aangezien  $x = t$ , komen de grenzen van  $t$  exact overeen met deze van  $x$ , dus bekomen we

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2, \end{cases}$$

met  $-3 \leq t \leq 2$ .

2. Om de vergelijking van  $x$  te bepalen, merken we op dat deze start bij  $x = 2$  en eindigt bij  $x = -1$ . Dit betekent dat de verplaatsing in de  $x$ -richting  $(1-2) = -1$  is. Daarom is de vergelijking voor  $x$ ,  $x = 2 + (-1)t = 2 - t$ . Voor  $y$  merken we op dat het lijnstuk start in  $y = -3$  en eindigt in  $y = 5$ . De verplaatsing in de  $y$ -richting is dus  $(5 - (-3)) = 8$ , we bekomen  $y = -3 + 8t$ . Ons finaal antwoord is

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + 8t, \end{cases}$$

met  $0 \leq t \leq 1$ .

3. Als we de bovenstaande formules willen gebruiken om de cirkel  $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$  te parametriseren dienen we deze eerst om te vormen naar de standaard gedaante. We zonderen de kwadraten af en bekomen  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$  of

$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$

In deze vergelijking zien we  $\cos(t) = \frac{x+1}{3}$  en  $\sin(t) = \frac{y-2}{3}$ . Door deze twee laatste vergelijkingen te herschikken bekomen we  $x = -1 + 3 \cos(t)$  en  $y = 2 + 3 \sin(t)$ . We laten  $t$  variëren over  $[0, 2\pi[$ , zodat de cirkel volledig kan doorlopen worden. We verkrijgen als finaal antwoord

$$\begin{cases} x = -1 + 3 \cos(t) \\ y = 2 + 3 \sin(t), \end{cases}$$

met  $0 \leq t < 2\pi$ .

4. We bekomen onmiddellijk  $x = 2 \cos(t)$  en  $y = 3 \sin(t)$ . Het bereik van de parameter is in dit geval  $0 \leq t < 2\pi$ , maar we zijn enkel geïnteresseerd in de linkerhelft van de ellips, dus we beperken  $t$  tot waarden die overeenkomen met hoeken uit kwadrant II en kwadrant III, namelijk  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ . Ons finaal antwoord is bijgevolg

$$\begin{cases} x = 2 \cos(t) \\ y = 3 \sin(t), \end{cases}$$

met  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ .

Merk op dat krommen op oneindig veel manieren geparametriseerd kunnen worden. Er zijn twee eenvoudige manieren om parameterrepresentaties aan te passen.

- **Oriëntatie omkeren:** Vervang elke  $t$  in de parameterrepresentatie door  $-t$  om een kromme te bekomen met een tegengestelde oriëntatie.
- **Parameter verschuiven:** Vervang elke  $t$  in de parameterrepresentatie door  $t - c$  om een kromme te bekomen waarbij de start van de parameter  $t$ ,  $c$  eenheden vooruit verschoven is.

Deze aanpassingen worden geïllustreerd in het volgende voorbeeld.

### Voorbeeld 11.8

Bepaal de parametrisatie van de eenheidscirkel, wijzerzin georiënteerd, waarvoor  $t = 0$  overeenkomt met  $(0, -1)$ .

#### Oplossing

We weten dat

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t), \end{cases}$$

met  $0 \leq t < 2\pi$  de tegenwijzerzin georiënteerde parametervergelijking van de eenheidscirkel voorstelt waarvoor  $t = 0$  overeenkomt met  $(1, 0)$ . Het eerste wat we willen doen is de oriëntatie omkeren. Door  $t$  te vervangen door  $-t$  verkrijgen we

$$\begin{cases} x = \cos(-t) \\ y = \sin(-t), \end{cases}$$

met  $0 \leq t < 2\pi$  wat vereenvoudigd kan worden tot

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = -\sin(t), \end{cases}$$

met  $0 \leq t < 2\pi$ .

Deze parametervoorstelling heeft een oriëntatie in wijzerzin, maar  $t = 0$  komt nog steeds overeen met het punt  $(1, 0)$ . Het punt  $(0, -1)$  wordt bereikt indien  $t = -\frac{3\pi}{2}$ . Onze strategie zal zijn om de parametervoorstelling eerst te laten starten in het punt  $(0, -1)$  en dan de parameter te verschuiven zodat de start overeenkomt met  $t = 0$ . We weten dat elk interval met een lengte van  $2\pi$  de volledige cirkel zal parametriseren, dus we laten  $t$  starten bij  $-\frac{3\pi}{2}$  en bepalen de bovengrens door hier  $2\pi$  bij op te tellen zodat  $-\frac{3\pi}{2} \leq t < \frac{\pi}{2}$ . We verschuiven nu de parameter door een vertraging van  $\frac{3\pi}{2}$  eenheden in te voeren door elke  $t$  die voorkomt te vervangen door  $(t - \frac{3\pi}{2})$ :

$$\begin{cases} x = \cos(t - \frac{3\pi}{2}) \\ y = -\sin(t - \frac{3\pi}{2}), \end{cases}$$

met  $-\frac{3\pi}{2} \leq t - \frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ . Dit kan vereenvoudigd worden tot

$$\begin{cases} x = -\sin(t) \\ y = -\cos(t), \end{cases} \quad (11.4)$$

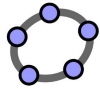
met  $0 \leq t < 2\pi$ .

We kunnen ons antwoord uit Voorbeeld 11.8 gebruiken om de vergelijking voor een **cycloïde** (*cycloid*) af te leiden. Veronderstel dat een cirkel met straal  $r$  aan constante snelheid langs de positieve  $x$ -as rolt (Figuur 11.10). Zij  $\theta$  de hoek in radialen die de grootte van de rotatie van de straal in wijzerzin meet.

Ons doel is om een parametervergelijking te bepalen voor de coördinaten van het punt  $P(x, y)$  in functie van  $\theta$ . Uit Voorbeeld 11.8 weten we dat een in wijzerzin georiënteerde eenheidscirkel vertrekkende in het punt  $(0, -1)$  gegeven wordt door Vergelijking (11.4). Om dit aan te passen voor een cirkel met



straal  $r$ , moeten we zowel  $x$  als  $y$  vermenigvuldigen met  $r$ , dit levert



$$\begin{cases} x = -r \sin(\theta) \\ y = -r \cos(\theta). \end{cases}$$

We moeten nu nog een aanpassing doen zodat de cirkel niet stationair in het middelpunt  $(0,0)$  blijft, maar wel rolt langs de positieve  $x$ -as. Omdat de snelheid  $v$  constant is, weten we dat op tijdstip  $t$  het middelpunt van de cirkel een afstand  $vt$  langs de positieve  $x$ -as heeft afgelegd. Aangezien verder de straal van de cirkel  $r$  is en de cirkel zich niet verticaal beweegt, weten we dat het middelpunt van de cirkel zich altijd  $r$  eenheden boven de  $x$ -as bevindt. We weten derhalve dat op tijdstip  $t$  het middelpunt van de cirkel zich in het punt  $(vt, r)$  bevindt. We weten verder uit Hoofdstuk 5 dat  $v = \frac{r\theta}{t}$ , of  $vt = r\theta$ . Het middelpunt van de cirkel in functie van  $\theta$  is dus  $(r\theta, r)$ . Als resultaat moeten we de vergelijking aanpassen door de  $x$ -coördinaat  $r\theta$  eenheden naar rechts te verplaatsen en de  $y$ -coördinaat  $r$  eenheden naar boven. Op deze manier verkrijgen we

$$\begin{cases} x = -r \sin(\theta) + r\theta \\ y = -r \cos(\theta) + r, \end{cases}$$

of ook

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin(\theta)) \\ y = r(1 - \cos(\theta)). \end{cases}$$

Aangezien de beweging start bij  $\theta = 0$  en oneindig lang doorgaat, stellen we  $\theta \geq 0$ .

Figuur 11.11 geeft – ter illustratie – een beknopt overzicht van belangrijke en bekende krommen samen met hun parametervergelijkingen.

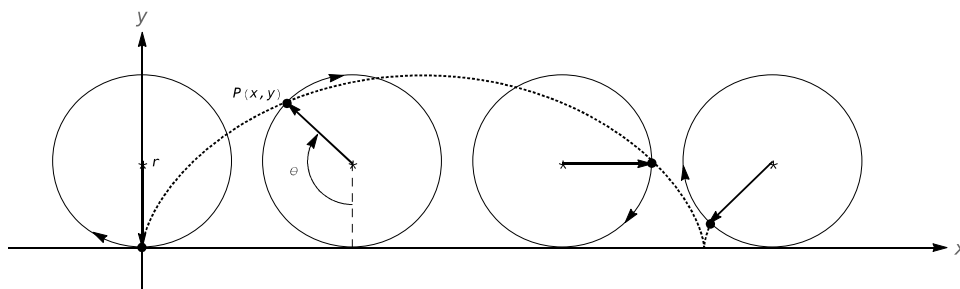
### 11.2.4 Kegelsneden als parametervergelijkingen

Voor de volledigheid ronden we deze sectie af door de parametervergelijkingen van de kegelsneden besproken in Sectie 4.4 op te lijsten.

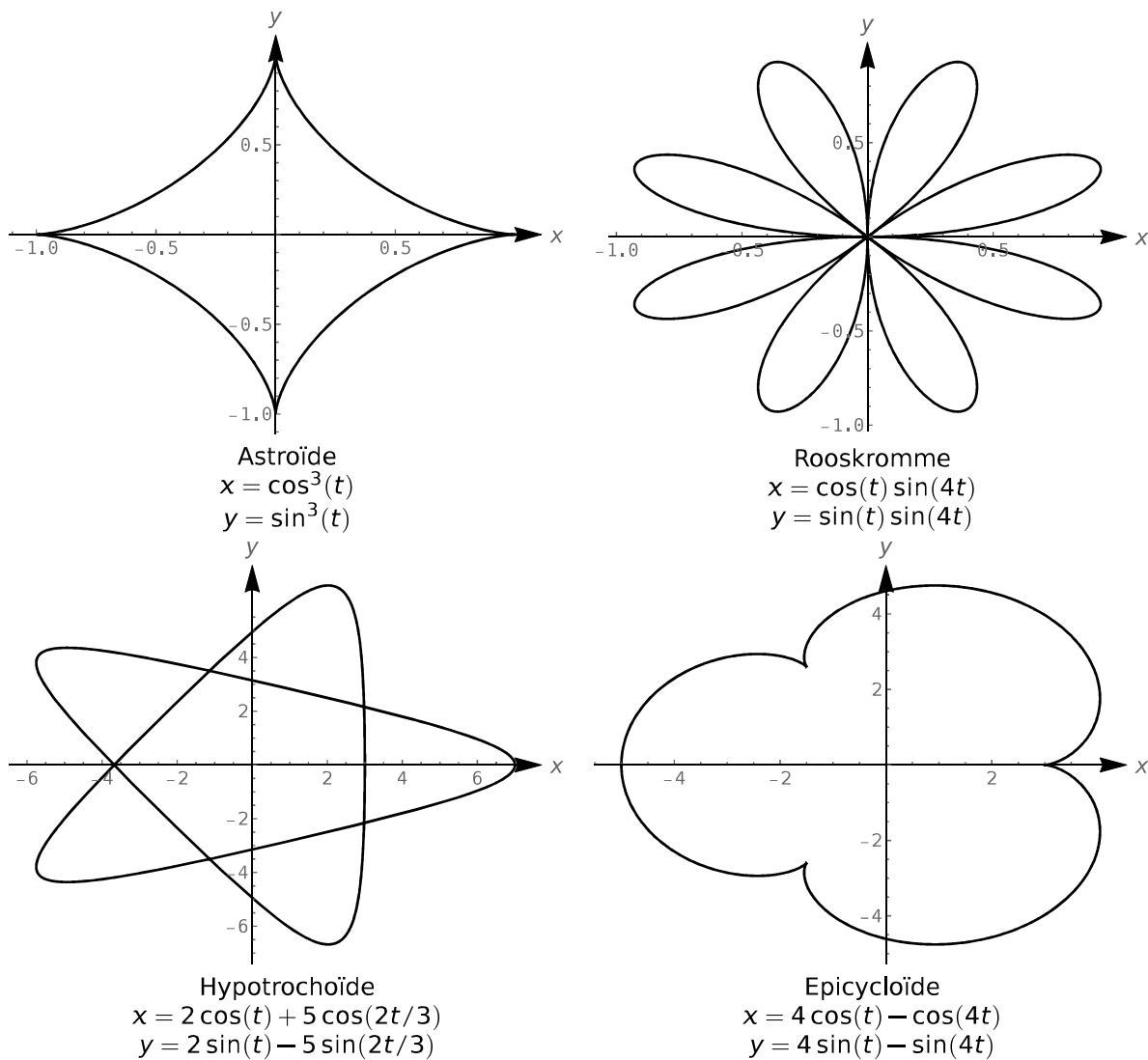
De parametervoorstelling van een cirkel met als middelpunt de oorsprong en straal  $r$  wordt gegeven door

$$\begin{cases} x = r \cos(t) \\ y = r \sin(t), \end{cases} \quad (11.5)$$

met  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Analoog wordt de parametervoorstelling van een ellips met als middelpunt de oor-



**Figuur 11.10:** Een cycloïde van een rollende cirkel met straal  $r$ .



**Figuur 11.11:** Een overzicht van interessante, vlakke krommen.

sprong, een halve grote as  $a$  en een halve kleine as  $b$  ( $a > b$ ) gegeven door

$$\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t), \end{cases} \quad (11.6)$$

met  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

## 11.3 Afleiden van parameter -en poolvergelijkingen

### 11.3.1 Parametervergelijkingen

In deze sectie zullen we technieken binnen de calculus illustreren die gebruikt worden om krommen te bestuderen die gegeven worden door een stelsel parametervergelijkingen. We zijn onder meer geïnteresseerd in rechten die raken in punten op zo een kromme. Ze tonen hoe  $y$ -waarden veranderen



ten opzichte van  $x$ -waarden. Ze zijn handig om benaderingen te maken en ze geven de ogenblikkelijke beweegerichting aan.

De helling van een raaklijn is steeds  $\frac{dy}{dx}$  en de kettingregel maakt het mogelijk deze te berekenen in de context van parametervergelijkingen. Als  $x = f(t)$  en  $y = g(t)$ , dan stelt de kettingregel dat

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Dit oplossen naar  $\frac{dy}{dx}$  levert

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}, \quad (11.7)$$

op voorwaarde dat  $f'(t) \neq 0$  en dat  $f$  en  $g$  afleidbaar zijn over een open interval  $I$ .

Deze informatie laat ons toe de raaklijn en de normaal aan een kromme  $C$  te definiëren.

### Definitie 11.2 (Raaklijn en normaal)

Zij  $C$  een kromme geparametriseerd door  $x = f(t)$  en  $y = g(t)$ , met  $f$  en  $g$  afleidbare functies over een interval  $I$  dat  $t = t_0$  bevat. De **raaklijn** (*tangent line*) aan  $C$  in  $t = t_0$  is de rechte door  $(f(t_0), g(t_0))$  met als richtingscoëfficiënt (rico)

$$m = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)},$$

met  $f'(t_0) \neq 0$ .

De **normaal** (*normal line*) aan  $C$  in  $t = t_0$  is de rechte door  $(f(t_0), g(t_0))$  met rico  $m = -f'(t_0)/g'(t_0)$ , met  $g'(t_0) \neq 0$ .

Deze definitie leidt tot twee speciale gevallen. Wanneer de raaklijn horizontaal is, is de normaal niet gedefinieerd volgens Definitie 9.2. Analoog is de raaklijn niet gedefinieerd indien de normaal horizontaal is. Het lijkt aannemelijk dat deze rechten bestaan, dus we voegen het volgende toe aan de bovenstaande definitie.

1. Als de raaklijn in  $t = t_0$  een rico 0 heeft, dan is de normaal aan  $C$  in  $t = t_0$  de rechte  $x = f(t_0)$ .
2. Als de normaal in  $t = t_0$  een rico 0 heeft, dan is de raaklijn aan  $C$  in  $t = t_0$  de rechte  $x = f(t_0)$ .

### Voorbeeld 11.9

Zij  $x = 5t^2 - 6t + 4$  en  $y = t^2 + 6t - 1$  en zij  $C$  de kromme gedefinieerd door deze vergelijkingen.

1. Bepaal de vergelijkingen van de raaklijn en de normaal aan  $C$  in  $t = 3$ .
2. Bepaal waar  $C$  verticale en horizontale raaklijnen heeft.

#### Oplossing

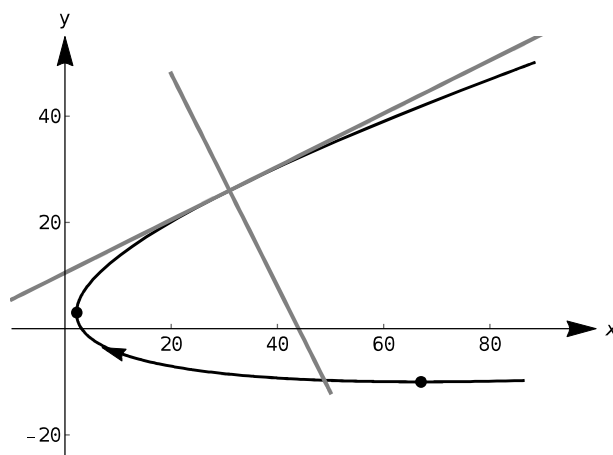
1. We berekenen eerst  $f'(t) = 10t - 6$  en  $g'(t) = 2t + 6$ . Merk op dat het ongewoon lijkt dat  $\frac{dy}{dx}$

een functie is van  $t$  en niet van  $x$ . Net zoals de punten op de kromme zijn ook de raaklijnen genoteerd in termen van  $t$ .

Het punt op  $C$  waarvoor  $t = 3$  is  $(31, 26)$ . De helling van de raaklijn is  $m = 1/2$  en deze van de normaal is bijgevolg  $m = -2$ . Dus,

- de vergelijking van de raaklijn is  $y = \frac{1}{2}(x - 31) + 26$  en
- de vergelijking van de normaal is  $y = -2(x - 31) + 26$ .

Dit wordt geïllustreerd in Figuur 11.12.



**Figuur 11.12:** Grafiek van de raaklijn en de normaal in Voorbeeld 11.9.

2. Om te bepalen waar  $C$  horizontale raaklijnen heeft, stellen we  $\frac{dy}{dx} = 0$  en lossen we deze vergelijking op naar  $t$ . In dit geval komt dit neer op  $g'(t) = 0$  oplossen naar  $t$  (en zeker zijn dat  $f'(t) \neq 0$ ):

$$g'(t) = 0 \Rightarrow 2t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -3.$$

Het punt op  $C$  dat overeenkomt met  $t = -3$  is  $(67, -10)$ . De raaklijn in dit punt is horizontaal en heeft als vergelijking  $y = -10$ .

Om te bepalen waar  $C$  een verticale raaklijn heeft, gaan we op zoek naar de punten waarvoor  $C$  een horizontale normaal heeft en stellen we  $-\frac{f'(t)}{g'(t)} = 0$ . Dit komt neer op het oplossen van  $f'(t) = 0$  naar  $t$  (en zeker zijn dat  $g'(t) \neq 0$ ):

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 10t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 0.6.$$

Het punt op  $C$  dat overeenkomt met  $t = 0.6$  is  $(2.2, 2.96)$ . De raaklijn in dit punt is  $x = 2.2$ .

### Voorbeeld 11.10

Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de astroïde waarvoor  $x = \cos^3(t)$ ,  $y = \sin^3(t)$  in  $t = 0$  (Figuur 11.11).

Oplossing

We starten met het bepalen van  $x'(t)$  en  $y'(t)$ :

$$x'(t) = -3 \sin(t) \cos^2(t) \quad \text{en} \quad y'(t) = 3 \cos(t) \sin^2(t).$$

Merk op dat beide 0 zijn in  $t = 0$ . De kromme vertoont hier een knik in de grafiek. Door  $\frac{dy}{dx}$  te evalueren in deze punten verkrijgen we de onbepaalde vorm  $0/0$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cos(t) \sin^2(t)}{-3 \sin(t) \cos^2(t)} = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

met  $\cos(t) \neq 0$  en  $\sin(t) \neq 0$ . Als  $t = 0$  is het aanlokkelijk om te stellen dat

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(0)}{\cos(0)} = 0,$$

maar dit negeert dat we eerder stelden dat  $\sin(t) \neq 0$ . In werkelijkheid vertoont de grafiek een knik in  $t = 0$ , als zowel  $x' = 0$  en  $y' = 0$ .

We kunnen echter wel de helling van de raaklijnen dicht bij  $t = 0$  bepalen door de limiet voor  $t \rightarrow 0$  te berekenen:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'(t)}{x'(t)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3 \cos(t) \sin^2(t)}{-3 \sin(t) \cos^2(t)} && \text{(We kunnen schrappen indien } t \neq 0.) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( -\frac{\sin(t)}{\cos(t)} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

We realiseerden ons hier iets interessants. Wanneer de afgeleide  $\frac{dy}{dx}$  een onbepaalde vorm oplevert, kunnen we deze waarde definiëren door de limiet  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{dy}{dx}$  te nemen, indien er een limiet bestaat. Dit laat ons toe de helling van raaklijnen te bepalen in knikpunten.

We stelden vast dat de helling van de raaklijn in  $t = 0$  gelijk is aan 0. Daarom is de raaklijn  $y = 0$ , de x-as.

### 11.3.2 Poolvergelijkingen

De basis voor deze sectie is de omzetting van een poolvergelijking  $r = f(\theta)$  naar een stelsel parametervergelijkingen. Door gebruik te maken van de gelijkheden  $x = r \cos(\theta)$  en  $y = r \sin(\theta)$  kunnen we een stelsel  $x = f(\theta) \cos(\theta)$ ,  $y = f(\theta) \sin(\theta)$  bekomen en hiermee verder werken.

Als we bijvoorbeeld gevraagd worden om een raaklijn te construeren aan  $r = f(\theta)$  zullen we gebruikmaken van  $x = f(\theta) \cos(\theta)$ ,  $y = f(\theta) \sin(\theta)$  om  $\frac{dy}{dx}$  te berekenen. Steunend op Vergelijking (11.7) bekomen we dan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}.$$

Elk van de afgeleiden in het rechterlid kan gevonden worden door gebruik te maken van de kettingregel om te komen tot

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta)}{f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta)}. \quad (11.8)$$

**Voorbeeld 11.11**

Beschouw de limaçon  $r = 1 + 2 \sin(\theta)$  over  $[0, 2\pi]$ . Bepaal de vergelijking van de raaklijn en de normaal in de grafiek bij  $\theta = \pi/4$ .

**Oplossing**

We starten door  $\frac{dy}{dx}$  te berekenen. Met  $f'(\theta) = 2 \cos(\theta)$  verkrijgen we

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2 \cos(\theta) \sin(\theta) + \cos(\theta)(1 + 2 \sin(\theta))}{2 \cos^2(\theta) - \sin(\theta)(1 + 2 \sin(\theta))} \\ &= \frac{\cos(\theta)(4 \sin(\theta) + 1)}{2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) - \sin(\theta)}. \end{aligned}$$

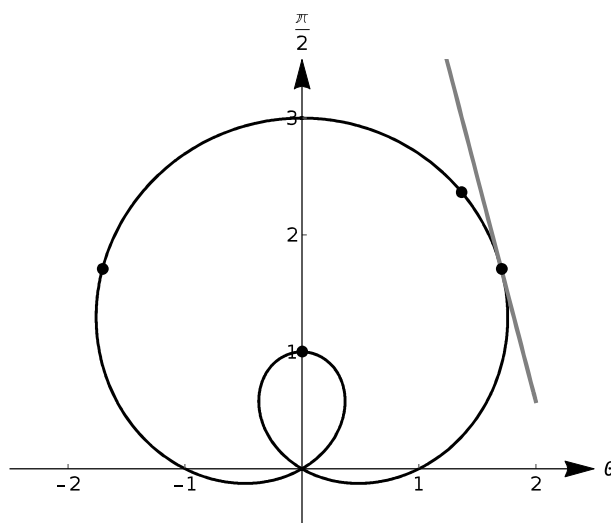
Als  $\theta = \pi/4$  geldt  $\frac{dy}{dx} = -2\sqrt{2} - 1$ . In cartesische coördinaten is het punt op de grafiek voor  $\theta = \pi/4$  gelijk aan  $(1 + \sqrt{2}/2, 1 + \sqrt{2}/2)$ . De cartesische vergelijking van de raaklijn aan de limaçon in  $\theta = \pi/4$  is bijgevolg

$$y = (-2\sqrt{2} - 1) \left( x - \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -3.83x + 8.24.$$

De limaçon en de raaklijnen zijn grafisch voorgesteld in Figuur 11.13.

De normaal heeft een richtingscoëfficiënt die omgekeerd en tegengesteld is aan deze van de raaklijn, dus de vergelijking is

$$y \approx \frac{1}{3.83}x + 1.26.$$



**Figuur 11.13:** De limaçon in Voorbeeld 11.11 met zijn raaklijn in  $\theta = \pi/4$ .

**11.3.3 Gladde functies**

Voor wat betreft gladde krommen gedefinieerd door een stelsel parametervergelijkingen, hebben we de volgende definitie om krommen zonder knikken te bekomen.

**Definitie 11.3 (Gladde krommen)**

Een kromme  $C$  gedefinieerd door  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  is **glad** (*smooth*) over een interval  $I$  als  $f'$  en  $g'$  continu zijn in  $I$  en niet tegelijkertijd 0, behalve mogelijks in de eindpunten van  $I$ . Een kromme is **stuksgewijs glad** (*piecewise smooth*) over  $I$  als  $I$  kan opgedeeld worden in deelintervallen waarbij  $C$  glad is over elk deelinterval.

De continuïteitsvoorwaarde is in overeenstemming met Definitie 9.7 en is nodig omdat de parametervergelijkingen niet afleidbaar zouden kunnen zijn in een punt. De tweede voorwaarde heeft betrekking op parametrisaties waarbij de oriëntatie op een zekere plaats  $t$  omkeert. Dit betekent dat als de kromme niet glad is in  $t = t_0$ , dat  $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$  want de snelheidsverandering van  $x$  (en  $y$ ) is 0. Als de parametervergelijking een pad afgelegd door een object beschrijft, betekent dit dat het object in rust is bij  $t_0$ . Een object in rust kan zijn richting plots veranderen.

Beschouw een astroïde, gegeven door  $x = \cos^3(t)$ ,  $y = \sin^3(t)$  (Figuur 11.11). De afgeleiden zijn:

$$x' = -3 \cos^2(t) \sin(t) \quad \text{and} \quad y' = 3 \sin^2(t) \cos(t).$$

Het is duidelijk dat beide 0 zijn als  $t = 0, \pi/2, \pi, \dots$ . De astroïde is dus niet glad in deze punten, wat overeen komt met de knikpunten in Figuur 11.11.

**Voorbeeld 11.12**

Zij de kromme  $C$  gedefinieerd door de parametervergelijkingen  $x = t^3 - 12t + 17$  en  $y = t^2 - 4t + 8$ . Bepaal de eventuele punten waar de kromme niet glad is.

**Oplossing**

We starten door de afgeleiden te nemen:

$$x' = 3t^2 - 12 \quad \text{en} \quad y' = 2t - 4.$$

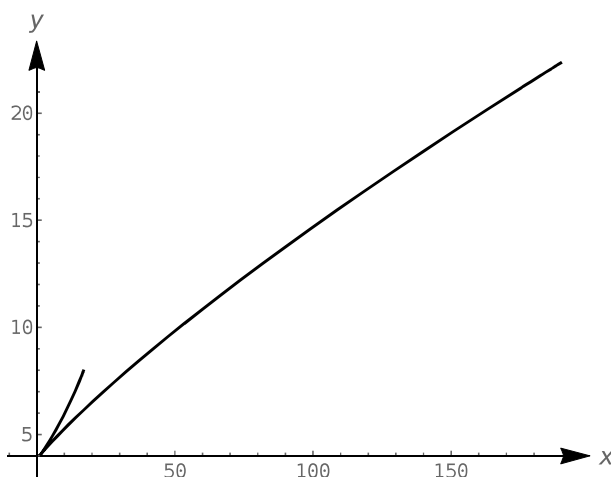
We stellen beide gelijk aan 0. Er volgt dat

$$x' = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 2,$$

en

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

We zien dat in  $t = 2$  zowel  $x'$  als  $y'$  gelijk aan 0 zijn.  $C$  is dus niet glad in  $t = 2$ , wat overeenkomt met het punt  $(1, 4)$ . De kromme is weergegeven in Figuur 11.14 en toont de knik in  $(1, 4)$ .



**Figuur 11.14:** De grafiek van de kromme in Voorbeeld 11.12.

Het is belangrijk op te merken dat een scherpe hoek niet hoofdzakelijk hoeft aanwezig te zijn als een kromme niet glad is. We kunnen bijvoorbeeld nagaan dat  $x = t^3$  en  $y = t^6$  de vertrouwde parabool  $y = x^2$  beschrijft. Toch is de corresponderende kromme niet glad. Een deeltje dat langs deze parabool beweegt komt tot rust in  $t = 0$ , zonder dat er een scherpe hoek aanwezig is.

### 11.3.4 Concaviteit

We kunnen ook de concaviteit van vlakke krommen beschrijven door parametervergelijkingen te bestuderen. Dit betekent dat we geïnteresseerd zijn in  $\frac{d^2y}{dx^2}$ . Om dit te berekenen hebben we de afgeleide van  $\frac{dy}{dx}$  naar  $x$  nodig, namelijk

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{dy}{dx} \right].$$

Herinner je dat  $\frac{dy}{dx}$  een functie is van  $t$  en niet  $x$ . Dit maakt de berekening niet zo vanzelfsprekend.

Zij nu  $h(t) = \frac{dy}{dx}$ . We zoeken  $\frac{d}{dx}[h(t)]$ , wat volgt uit de kettingregel. We bekommen bijgevolg

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dx} = \frac{\frac{dh}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Dit leidt tot

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left[ \frac{dy}{dx} \right]}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt} \left[ \frac{dy}{dx} \right]}{f'(t)}. \quad (11.9)$$

Een voorbeeld zal ons helpen om dit te begrijpen.

#### Voorbeeld 11.13

Zij  $x = 5t^2 - 6t + 4$  en  $y = t^2 + 6t - 1$ , zoals in Voorbeeld 11.9. Bepaal de  $t$ -intervallen waarover de grafiek convex/concaaf is.





## Oplossing

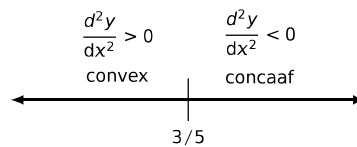
Concaviteit wordt bepaald door de tweede-orde afgeleide van  $y$  naar  $x$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$ . We berekenen deze hier volgens Vergelijking (11.9).

In Voorbeeld 11.9 vonden we dat  $\frac{dy}{dx} = \frac{2t+6}{10t-6}$  en  $f'(t) = 10t-6$ . Dus:

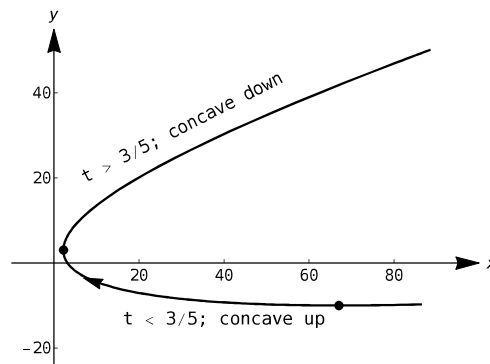
$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{d}{dt} \left[ \frac{2t+6}{10t-6} \right]}{10t-6} \\ &= \frac{72}{(10t-6)^2} \\ &= -\frac{72}{10t-6} \\ &= -\frac{72}{(10t-6)^3} \\ &= -\frac{9}{(5t-3)^3}. \end{aligned}$$

De grafiek is convex als  $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$  en concaaf als  $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ . We gaan op zoek naar de intervallen waar de tweede-orde afgeleide groter of kleiner is dan 0 door eerst te bepalen waar deze 0 of onbepaald is.

Aangezien de teller van  $-\frac{9}{(5t-3)^3}$  nooit 0 is, geldt er dat  $\frac{d^2y}{dx^2} \neq 0$  voor alle  $t$ . Het quotiënt is niet gedefinieerd indien  $5t-3=0$ , dit is wanneer  $t=3/5$ . Steunend op het werk uitgevoerd in Sectie 10.4 bekijken we de waarden van  $t$  groter/kleiner dan  $3/5$  op de getallenas:



Door Voorbeeld 11.9 te herbekijken zien we dat bij  $t=3/5=0.6$  de grafiek een verticale raaklijn heeft. Dit punt is ook een buigpunt van de grafiek, zoals geïllustreerd in Figuur 11.15.



**Figuur 11.15:** Grafiek van de kromme in Voorbeeld 11.13.

## 11.4 Oefeningen

### Poolcoördinaten

✂ **Opgave 11.1** — Welke van de volgende koppels poolcoördinaten stellen hetzelfde punt voor?

(a)  $(3, 0)$

(d)  $\left(2, \frac{7\pi}{3}\right)$

(g)  $(-3, 2\pi)$

(b)  $(-3, 0)$

(e)  $(-3, \pi)$

(h)  $\left(-2, -\frac{\pi}{3}\right)$

(c)  $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$

(f)  $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

(i)  $\left(2, \frac{13\pi}{3}\right)$

✂ **Opgave 11.2** — Bepaal de cartesische coördinaten van de volgende punten in poolcoördinaten.

(a)  $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

(c)  $(0, \pi)$

(e)  $\left(2\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$

(b)  $(1, 0)$

(d)  $\left(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

**Opgave 11.3** — Zet de gegeven poolvergelijking om in een cartesische vergelijking en benoem de kromme.

✂ (a)  $\theta = \frac{\pi}{4}$

✂ (e)  $r = \sin(\theta) + \cos(\theta)$

✂ (b)  $r = \frac{7}{5 \sin(\theta) - 2 \cos(\theta)}$

✂ (f)  $r = \frac{2}{\sqrt{\cos^2(\theta) + 4 \sin^2(\theta)}}$

✂ (c)  $r = 2 \cos(\theta)$

✂✂ (g)  $r = \frac{1}{1 - \cos(\theta)}$

✂ (d)  $r = -4 \sin(\theta)$

✂✂ (h)  $r = \frac{1}{1 - 2 \sin(\theta)}$

**Opgave 11.4** — Schets de grafiek van de poolkrommen.

$$\text{✿ (a) } r = 2 \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{✿ (h) } r = 3 \sin(\theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

$$\text{✿ (b) } r = 2 - \sin(\theta)$$

$$\text{✿ (i) } r = 3 \csc(\theta) \quad (0 < \theta < \pi)$$

$$\text{✿ (c) } r = \frac{3}{2 \cos(\theta) - \sin(\theta)}$$

$$\text{✿✿ (j) } r^2 = 4 \sin(2\theta)$$

$$\text{✿✿ (k) } r^2 = 4 \cos(3\theta)$$

$$\text{✿ (d) } r = 2 + 4 \cos(\theta)$$

$$\text{✿✿ (l) } r^2 = \sin(3\theta)$$

$$\text{✿ (e) } r = 5 \sin(2\theta)$$

$$\text{✿✿ (m) } r = a\sqrt{\cos(2\theta)} \quad (a > 0)$$

$$\text{✿ (f) } r = 2 \sin(2\theta)$$

$$\text{✿✿ (n) } r = a \cos(n\theta) \quad (a > 0, n \in \mathbb{Z})$$

$$\text{✿ (g) } r = \cos\left(\frac{2\theta}{3}\right) \quad (0 \leq \theta \leq 6\pi)$$

$$\text{✿✿ (o) } r = \frac{a}{\theta} \quad (a > 0)$$

**Opgave 11.5** — Bepaal de snijpunten van de grafieken van de onderstaande poolvergelijkingen.

$$\text{✿ (a) } r = 3 \cos(\theta), \quad r = 1 + \cos(\theta)$$

$$\text{✿ (e) } r = \sin(3\theta), \quad r = \cos(3\theta), \quad [0, \pi]$$

$$\text{✿ (b) } r = \sin(\theta), \quad r = 1 - \sin(\theta)$$

$$\text{✿ (f) } r = 1 - \cos(\theta), \quad r = 1 + \sin(\theta), \quad [0, 2\pi]$$

$$\text{✿ (c) } r = \sqrt{3} \cos(\theta), \quad r = \sin(\theta)$$

$$\text{✿ (d) } r^2 = 2 \cos(2\theta), \quad r = 1$$

$$\text{✿ (g) } r = \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad r = 3 \csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

## Parametervergelijkingen

**Opgave 11.6** — Bepaal de cartesische vergelijking van de onderstaande krommen en teken ze.

$$\text{✿ (a) } \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t + 1 \end{cases} \quad (0 < t < +\infty)$$

$$\text{✿✿ (f) } \begin{cases} x = \cos(\sin(s)) \\ y = \sin(\sin(s)) \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

$$\text{✿ (b) } \begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = t - 1 \end{cases} \quad (0 < t < 4)$$

$$\text{✿✿ (g) } \begin{cases} x = \frac{1}{1+t^2} \\ y = \frac{t}{1+t^2} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\text{✿ (c) } \begin{cases} x = 3 \sin(2t) \\ y = 3 \cos(2t) \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{✿✿ (h) } \begin{cases} x = 1 - \sqrt{4-t^2} \\ y = 2 + t \end{cases} \quad (-2 \leq t \leq 2)$$

$$\text{✿✿ (d) } \begin{cases} x = e^t \\ y = e^{3t} - 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\text{✿✿ (i) } \begin{cases} x = \sec(t) \\ y = \tan(t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\text{✿ (e) } \begin{cases} x = \cosh(t) \\ y = \sinh(t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

**Opgave 11.7** — Bepaal een parametrisatie van de onderstaande krommen.

† (a) De onderste helft van  $y^2 = x - 1$ .

†† (b)  $x^{2/3} + y^{2/3} = 6^{2/3}$

† **Opgave 11.8** — Gebruik  $t = y$  om de snijlijn van  $y = 2x - 4$  en  $z = 3x + 1$  tussen  $(2, 0, 7)$  en  $(3, 2, 10)$  te parametriseren.

† **Opgave 11.9** — De snijlijn van het vlak  $x + y = 1$  en de paraboloid  $z = x^2 + y^2$  is een parabool. Parametriseer de volledige parabool door  $t = x$  als parameter te gebruiken. Kan  $t = y$  ook gebruikt worden als parameter? Wat kan je zeggen over  $t = z$ ?

**Opgave 11.10** — Geef een parametrisatie van de kromme die de doorsnede is van de gegeven oppervlakken.

† (a)  $x^2 + y^2 = 9$  en  $z = x + y$

†† (c)  $z = x^2 + y^2$  en  $2x - 4y - z - 1 = 0$

† (b)  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  en  $x + y = 1$

**Opgave 11.11** — Schets de grafiek van de onderstaande parameterkrommen.

† (a)  $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2 \end{cases} \quad (-2 \leq t \leq 2)$

† (d)  $\begin{cases} x = \sin(t) \\ y = \cos^2(t) \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}\right)$

† (b)  $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t + 3 \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$

†† (e)  $\begin{cases} x = 2t \\ y = t^3 + 4 \end{cases} \quad (-2 \leq t \leq 2)$

† (c)  $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - 3 \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$

†† (f)  $\begin{cases} x = -2 \sin(t) \\ y = 3 \cos(t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 3\pi)$

†† **Opgave 11.12** — Beschrijf de gelijkenissen en verschillen tussen de grafieken horende bij de onderstaande parametervergelijkingen.

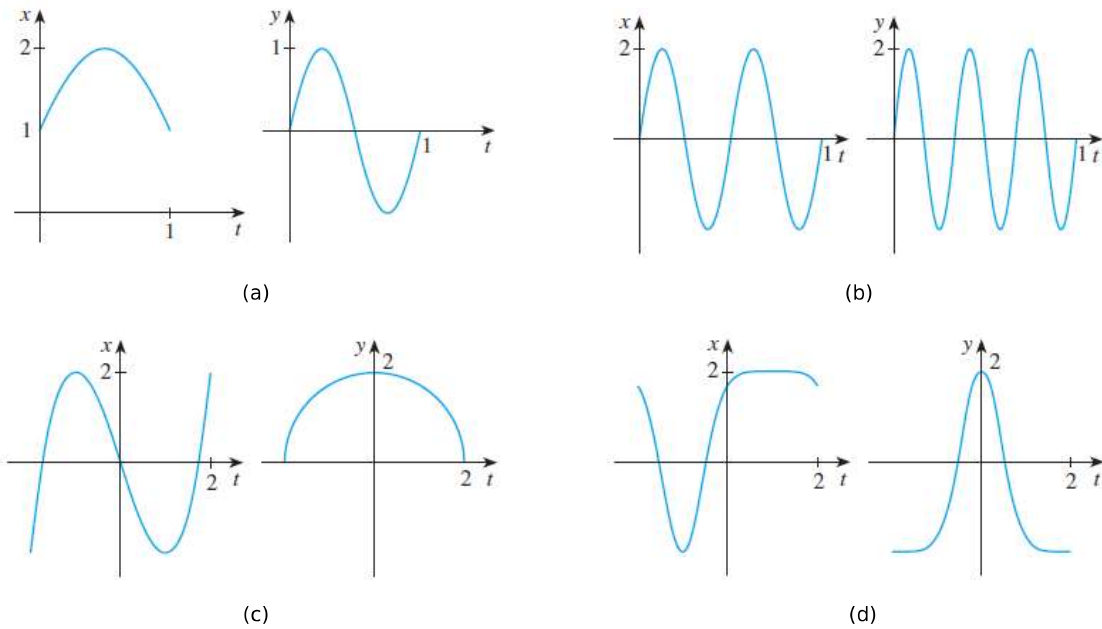
(a)  $x = \cos(t), \quad y = \sin(t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

(b)  $x = \cos(t^2), \quad y = \sin(t^2) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

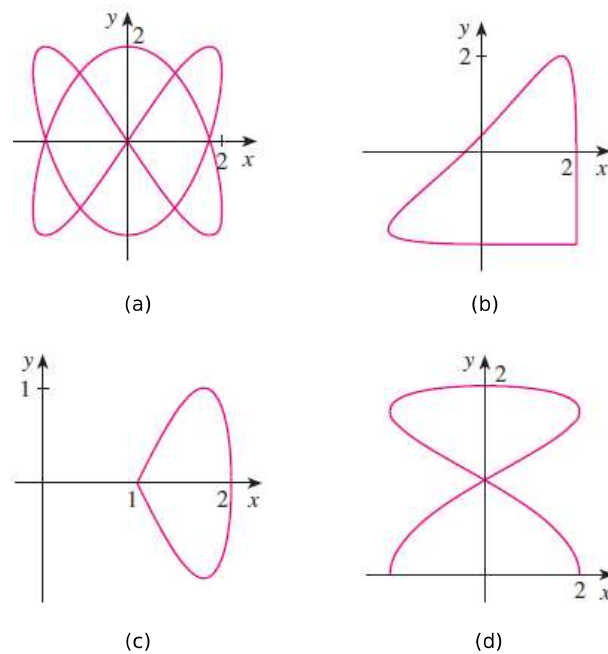
(c)  $x = \cos(1/t), \quad y = \sin(1/t) \quad (0 < t < 1)$

(d)  $x = \cos(\cos(t)), \quad y = \sin(\cos(t)) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

☞☞☞ **Opgave 11.13** — Bepaal welke grafieken van de parametervergelijkingen  $x = f(t)$  en  $y = f(t)$  in Figuur 11.20 horen bij de grafieken van de parameterkrommen in Figuur 11.21.



**Figuur 11.20:** Grafieken van de parametervergelijkingen uit Opgave 11.13.



**Figuur 11.21:** Grafieken van de parameterkrommen uit Opgave 11.13.

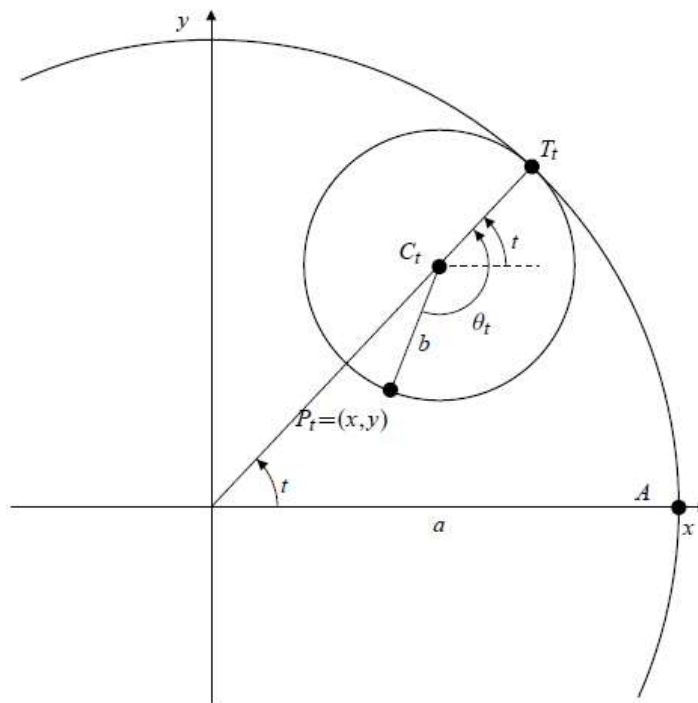
☞☞☞ **Opgave 11.14** — Een hypocycloïde is de kromme die een punt aflegt op een cirkel die rolt zonder glijden in een grotere cirkel. Veronderstel dat de kleinste cirkel straal  $b$  heeft en de grootste cirkel straal  $a > b$  en dat het middelpunt van deze laatste in de oorsprong ligt. Het punt dat de kromme beschrijft start in  $(a, 0)$ .

Toon aan dat een hypocycloïde wordt gegeven door:

$$\begin{cases} x = (a-b) \cos(t) + b \cos\left(\frac{a-b}{b}t\right) \\ y = (a-b) \sin(t) - b \sin\left(\frac{a-b}{b}t\right) \end{cases}$$

waarin  $t$  de hoek is tussen de positieve  $x$ -as en de rechte door de oorsprong en het punt waar de rollende cirkel de grootste cirkel raakt (Figuur 11.23). Deze parametervergelijkingen zijn uitdrukkingen voor de coördinaten van het punt  $P_t$ . Maak gebruik van deze figuur en het onderstaande om ze af te leiden.

- Bepaal de coördinaten van het punt  $C_t$  in functie van  $a$ ,  $b$  en  $t$ .
- Bepaal een uitdrukking voor de  $x$ -coördinaat van het punt  $P_t$  in functie van  $a$ ,  $b$ ,  $t$  en  $\theta_t$ . Schrijf hiertoe  $x$  als het verschil van twee afstanden, namelijk  $d(x_{C_t}, x_0)$  en  $d(x_{P_t}, x_{C_t})$ , waarbij  $x_{C_t}$  de  $x$ -coördinaat van het punt  $C_t$  voorstelt.
- Bepaal op analoge manier een uitdrukking voor de  $y$ -coördinaat van het punt  $P_t$  in functie van  $a$ ,  $b$ ,  $t$  en  $\theta_t$ .
- Schrijf  $\theta_t$  in functie van  $a$ ,  $b$  en  $t$  aan de hand van de booglengte van  $\widehat{AT}_t$  en  $\widehat{T_tP_t}$ . Hieruit volgen de gezochte parametervergelijkingen.



**Figuur 11.23:** Constructie van de hypocycloïde van 11.14.

Toon aan dat als  $a = 2$  en  $b = 1$  de hypocycloïde een rechte is en als  $a = 4$  en  $b = 1$  de hypocycloïde een astroïde voorstelt.

**Afleidende van parameter -en poolvergelijkingen**

**Opgave 11.15** — Bepaal de helling van de raaklijn aan de gegeven kromme in het gegeven punt.

$$\text{†} \text{ (a) } x = t^3 + t, \quad y = 1 - t^3 \quad \text{in } t = 1$$

$$\text{†} \text{ (c) } r = 1 - 3 \cos(\theta) \quad \text{in } \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{†} \text{ (b) } x = e^{2t}, \quad y = te^{2t} \quad \text{in } t = -2$$

$$\text{†} \text{ (d) } r = \sin(4\theta) \quad \text{in } \theta = \frac{\pi}{3}$$

**Opgave 11.16** — Bepaal een vergelijking van de raaklijn en de normaal in het gegeven punt aan de gegeven kromme.

$$\text{†} \text{ (a) } x = t^2 - t, \quad y = t^2 + t \quad \text{in } t = 1$$

$$\text{†} \text{ (b) } x = \cos(t), \quad y = \sin(2t) \quad (t \in [0, 2\pi]) \quad \text{in } t = \pi/4$$

$$\text{†} \text{ (c) } x = e^{t/10} \cos(t), \quad y = e^{t/10} \sin(t) \quad \text{in } t = \pi/2$$

$$\text{†} \text{ (d) } r = 1 + \sin(\theta) \quad \text{in } \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{†} \text{ (e) } r = \frac{1}{\sin(\theta) - \cos(\theta)} \quad \text{in } \theta = \pi$$

**Opgave 11.17** — Bepaal de coördinaten van de punten waarin de onderstaande krommen (a) een horizontale en (b) een verticale raaklijn hebben.

$$\text{†} \text{ (a) } x = t^3 - 3t, \quad y = 2t^3 + 3t^2$$

$$\text{†} \text{ (e) } x = \cos(t) \sin(2t), \quad y = \sin(t) \sin(2t)$$

$$\text{†} \text{ (b) } x = \sin(t), \quad y = \sin(t) - t \cos(t)$$

$$\text{†} \text{ (f) } r = 1 + \cos(\theta)$$

$$\text{†} \text{ (c) } x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

$$\text{†} \text{ (g) } r^2 = \cos(2\theta)$$

$$\text{†} \text{ (d) } x = \sec(t), \quad y = \tan(t) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{†} \text{ (h) } r = 2(1 - \sin(\theta))$$

**Opgave 11.18** — Bepaal de waarde(n) van  $t$  waarvoor de onderstaande krommen niet glad zijn.

$$\text{†} \text{ (a) } x = t^2 - 4t, \quad y = t^3 - 2t^2 - 4t$$

$$\text{†} \text{ (b) } x = t \sin(t), \quad y = t^3$$

$$\text{†} \text{ (c) } x = \frac{1}{t^2 + 1}, \quad y = t^3$$

$$\text{†} \text{ (d) } x = t^3 - 3t^2 + 3t - 1, \quad y = t^2 - 2t + 1$$

$$\text{†} \text{ (e) } x = \cos^2(t), \quad y = 1 - \sin^2(t)$$

$$\text{†} \text{ (f) } x = 2 \cos(t) - \cos(2t), \quad y = 2 \sin(t) - \sin(2t)$$

**Opgave 11.19** — Schets de grafiek van de gegeven kromme op basis van de eerste- en tweede- orde afgeleiden.

$$\text{†} \text{ (a) } x = t^2 - 2t, \quad y = t^2 - 4t$$

$$\text{†} \text{ (b) } x = t^2 + t, \quad y = 1 - t^2 \quad (-3 \leq t \leq 3)$$

$$\text{††} \text{ (c) } x = t^3 - 3t, \quad y = \frac{2}{1+t^2}$$

$$\text{††} \text{ (d) } x = \cos(t) + t \sin(t), \quad y = \sin(t) - t \cos(t) \quad (t \geq 0)$$