FACULTEIT BIO-INGENIEURSWETENSCHAPPEN

OCTOBER 3, 2024

FUNCTIE-ONDERZOEK

Prof. dr. ir. Jan Baetens

UNIVERSITEIT GENT

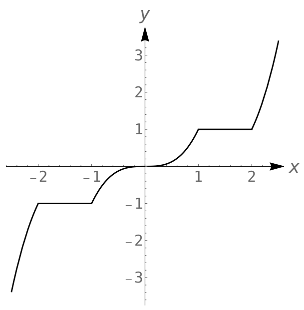
BionamiX

Notes

OVERZICHT

Notes

EXTREME WAARDEN



Notes

Definitie 10.1: Globaal/absoluut minimum en maximum

Zij f gedefinieerd over een interval I dat c bevat, dan is

1. $f(c)$ een minimum van f op I als $f(c) \leq f(x)$ voor alle x in I.
2. $f(c)$ een maximum van f op I als $f(c) \geq f(x)$ voor alle x in I.

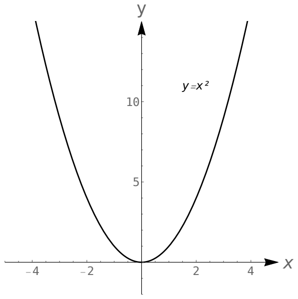
Definitie 10.2: Lokaal/relatief minimum en maximum

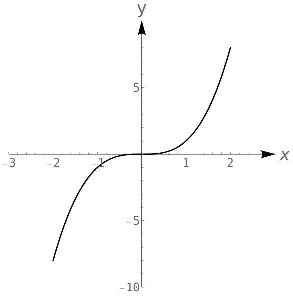
Zij f gedefinieerd over een interval I dat c bevat, en als er dan een $\delta > 0$ bestaat zodat

1. $f(c) \leq f(x)$ voor alle x in I indien $|x - c| < \delta$, dan is $f(c)$ een lokaal minimum van f.
2. $f(c) \geq f(x)$ voor alle x in I indien $|x - c| < \delta$, dan is $f(c)$ een lokaal maximum van f.

Notes

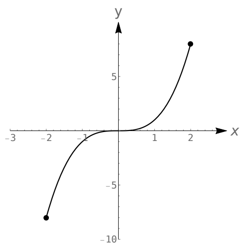
Extreme waarden





Notes

Extreme waarden

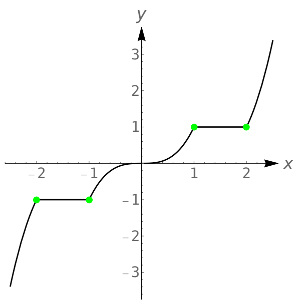


Stelling 10.1: Extremumstelling

Zij f een continue functie gedefinieerd over een gesloten interval I, dan heeft f zowel een minimum als maximum op I.

Notes

Hoe lokale extrema opsporen?

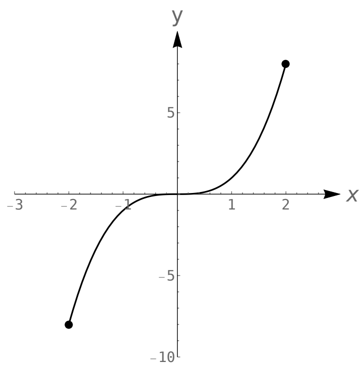


Stelling 10.3: Stelling van Fermat

Zij f een functie die gedefinieerd en afleidbaar is over een open interval I dat c bevat en heeft f een lokaal extremum in $(c, f(c))$, dan is $f'(c) = 0$.

Notes

Fermat: afgeleide f is nul in extrema



Notes

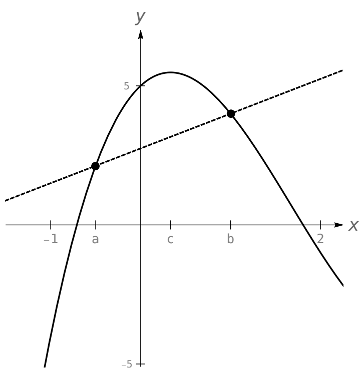
EXTRA VOORBEELD

Bepaal de extreme waarden van $f(x) = e^{\arcsin(x)}$ voor $-1 \leq x \leq 1$.

Notes

Notes

MIDDELWAARDESTELLING LINKT GEMIDDELDES



Notes

Stelling 10.4: Middelwaardestelling (van de differentiaalrekening)

Zij $y = f(x)$ een continue functie over $[a, b]$ en afleidbaar over $]a, b[$, dan bestaat er een waarde $c \in]a, b[$ waarvoor geldt dat

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

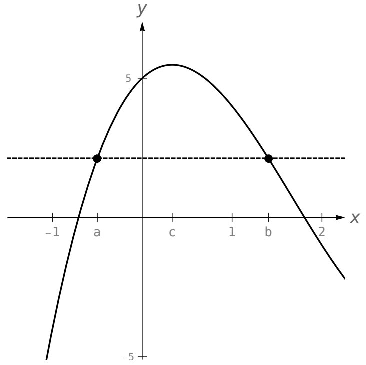
Stelling 10.5: Stelling van Rolle

Zij $y = f(x)$ een continue functie over $[a, b]$, afleidbaar over $]a, b[$ en geldt er dat $f(a) = f(b)$, dan bestaat er een $c \in]a, b[$ waarvoor geldt dat

$$f'(c) = 0.$$

Notes

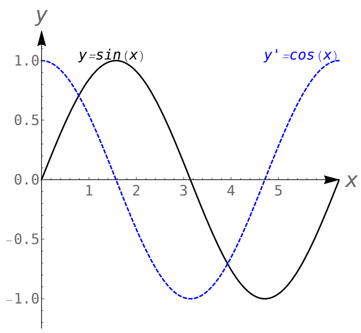
Stelling van Rolle



Notes

Notes

Functies stijgen, dalen of zijn constant

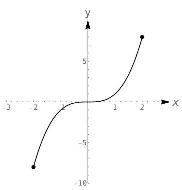


Notes

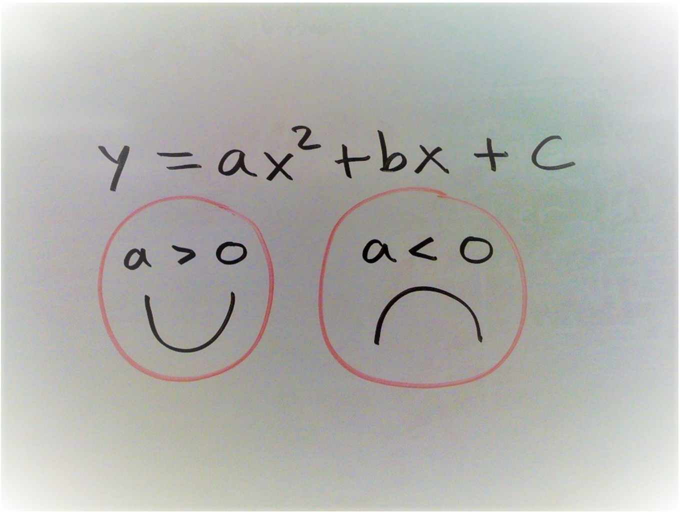
Stelling 10.6: Extremumtest

Zij f een afleidbare functie over een interval I en is $c \in I$ een kritieke waarde, dan is

1. $f(c)$ een lokaal maximum van f als het teken van f' in c wijzigt van positief naar negatief;
2. $f(c)$ een lokaal minimum van f als het teken van f' in c wijzigt van negatief naar positief;
3. $f(c)$ geen lokaal extremum van f als het teken van f' niet wijzigt in c.

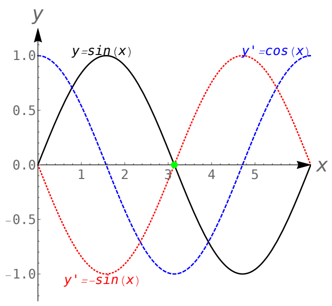


Notes



Notes

Convex (+) versus concaaf (-)



- Convex: f' is stijgend
- Concaaf: f' is dalend

Notes

Stelling 10.9: Buigpunten

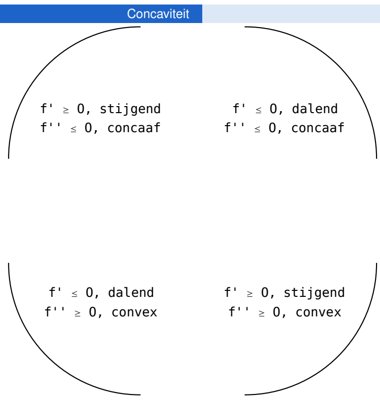
Zij $(c, f(c))$ een buigpunt op de grafiek van f, dan is $f''(c) = 0$ of f'' niet gedefinieerd in c.

Stelling 10.10: Concaviteitstest

Zij c een kritieke waarde van f waar $f''(c)$ gedefinieerd is, dan heeft

1. f een lokaal maximum in $(c, f(c))$ als $f''(c) < 0$.
2. f een lokaal minimum in $(c, f(c))$ als $f''(c) > 0$.
3. f een lokaal minimum, lokaal maximum of geen lokaal extremum in $(c, f(c))$ als $f''(c) = 0$.

Notes



Notes

Overzicht

Notes

Functie-onderzoek brengt alles samen

1. Domein en beeld
2. Symmetrie en intercept
3. Asymptoten
   1. verticaal
   2. horizontaal
   3. schuin
4. Kritische/singuliere punten en lokale extrema
5. Buigpunten en concaviteit
6. Samenvattend overzicht
7. Schets

Notes

Extra voorbeeld

Onderzoek de beeldlijn van $y = \arctan(\ln(x))$.

Notes

Extra voorbeeld

Onderzoek de beeldlijn van $y = \arctan(\ln(x))$.

Oplossing

Notes

Extra voorbeeld

Onderzoek de beeldlijn van $y = \arctan(\ln(x))$.

Oplossing

Notes

Overzicht

Notes

Notes

Voorbeeld 10.13

Een vrouw heeft 100 m omheining, een kleine hond en een groot erf met een beek. Ze wil een zo groot mogelijk rechthoekig terrein voor haar hond afbakenen, waarbij de beek één zijde van het terrein vormt. Welke afmetingen heeft zo een terrein met maximale oppervlakte?

Oplossing

1. Probleemdefinitie en schets
2. Relevante vergelijkingen
   - Oppervlakte$= xy$
   - Omtrek$= x + 2y = 100$
3. Fundamentele vergelijking

$$\text{Oppervlakte} = A(x) = x(50 - x/2) = 50x - \frac{1}{2}x^2$$

4. Domeinbepaling

Notes

VOORBEELD 10.13

Een vrouw heeft 100 m omheining, een kleine hond en een groot erf met een beek. Ze wil een zo groot mogelijk rechthoekig terrein voor haar hond afbakenen, waarbij de beek één zijde van het terrein vormt. Welke afmetingen heeft zo een terrein met maximale oppervlakte?

Oplossing

1. Probleemdefinitie en schets
2. Relevante vergelijkingen
3. Fundamentele vergelijking: $A(x) = x(50 - x/2) = 50x - \frac{1}{2}x^2$
4. Domeinbepaling
5. Bepaling extrema
   - Randpunten
   - Kritische punten : $A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 50 \Leftrightarrow A = 1250$
6. Antwoord: $x = 50$, dus $y = 50 - x/2 = 25$ en $A = 1250$

Notes

EXTRA VOORBEELD

Een frisdrankenblik heeft een inhoud van 33 centiliter. De oppervlakte van het stuk blik dat nodig is om het te produceren hangt af van de hoogte h en de straal r van het grond- en bovenvlak. Bepaal de afmetingen h en r waarvoor de totale blikoppervlakte minimaal is.

Oplossing

Notes

EVEN RECAPITULEREN...

Notes

Notes