FACULTEIT BIO-INGENIEURSWETENSCHAPPEN

17 OKTOBER 2024

POOLCOÖRDINATEN EN PARAMETERVERGELIJKINGEN

Prof. dr. ir. Jan Baetens

UNIVERSITEIT GENT

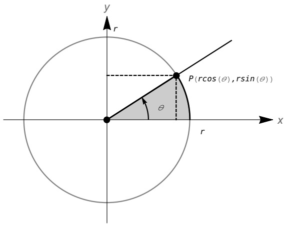
BionamiX

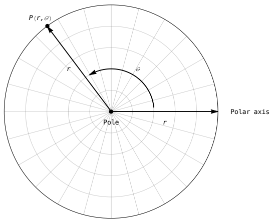
Notes

OVERZICHT

Notes

PUNTEN TE IDENTIFICEREN MET POOLCOÖRDINATEN





- $x = r\cos(\theta)$ en $y = r\sin(\theta)$
- $x^2 + y^2 = r^2$ en $\tan(\theta) = \dfrac{y}{x}$ $(x \neq 0)$

Notes

EXTRA VOORBEELD

Druk de positie van het punt $P\left(-3, -3\right)$ uit in poolcoördinaten.

Notes

De arctan2-functie bekijkt ook kwadrant

$$\operatorname{arctan2}(y,x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & , \text{ als } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & , \text{ als } x < 0 \wedge y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & , \text{ als } x < 0 \wedge y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \text{ als } x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \text{ als } x = 0 \wedge y < 0 \\ \text{niet gedefinieerd} & , \text{ als } x = 0 \wedge y = 0 \end{cases}$$

Notes

Extra voorbeeld

Druk de positie van het punt $P\,(-3,-3)$ uit in poolcoördinaten.

Notes

Extra voorbeeld

Druk de vergelijking $y = x^2$ uit in poolcoördinaten.

Notes

Grafiek van een poolvergelijking (extra vb)

Schets de grafiek van de functie $r(\theta) = 4\cos(\theta)$

Notes

Overzicht

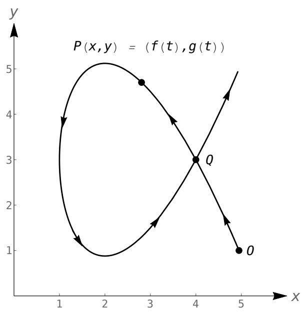
1 Poolcoördinaten

2 Parametervergelijkingen

3 Afleiden en parameter- en poolvergelijkingen

Notes

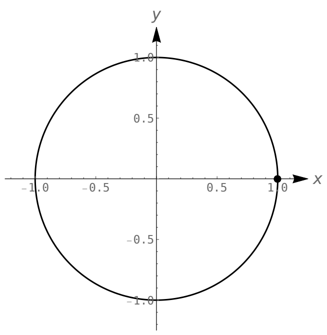
Parametervoorstelling: x en y gestuurd



Notes

Parametervoorstelling definieert oriëntatie

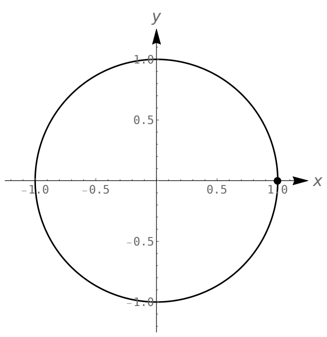
$$\begin{cases} x &= \cos(t) \\ y &= \sin(t) \end{cases}$$



Notes

Parametervoorstelling definieert oriëntatie

$$\begin{cases} x &= \cos(-t) \\ y &= \sin(-t) \end{cases}$$



Notes

EXTRA VOORBEELD

Schets de grafiek van de $x = 2e^{-t}$, $y = e^{-2t}$ voor $t \geq 0$.

Notes

EXTRA VOORBEELD

Schets de grafiek van de $x = 2e^{-t}$, $y = e^{-2t}$ voor $t \geq 0$.

Notes

OVERZICHT

Notes

RICO VAN EEN RAAKLIJN AAN EEN KROMME?

1. Parametervergelijkingen: $x = f(t)$ en $y = g(t)$
   - Helling raaklijn: $\frac{dy}{dx}$
   - Kettingregel:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}$$

2. Poolvergelijkingen: $x = f(\theta)\cos(\theta)$ en $y = f(\theta)\sin(\theta)$
   - Kettingregel

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta}\\ &= \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}\end{aligned}$$

Notes

VOORBEELD 11.11

Bepaal de normaal aan de limaçon $r = 1 + 2\sin(\theta)$ in $\theta = \pi/4$. Bepaal tevens de raaklijnen aan de grafiek ter hoogte van de pool.

Oplossing

1. Parametervergelijkingen

$$\begin{cases} x &= (1 + 2\sin(\theta))\cos(\theta) \\ y &= (1 + 2\sin(\theta))\sin(\theta) \end{cases}$$

2. Afleiden naar θ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} &= 2\cos^2(\theta) - \sin(\theta)(1 + 2\sin(\theta)) \\ \dfrac{dy}{d\theta} &= 2\cos(\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta)(1 + 2\sin(\theta)) \end{cases}$$

Notes

VOORBEELD 11.11

Bepaal de normaal aan de limaçon $r = 1 + 2\sin(\theta)$ in $\theta = \pi/4$. Bepaal tevens de raaklijnen aan de grafiek ter hoogte van de pool.

Oplossing

2. Afleiden naar θ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} &= 2\cos^2(\theta) - \sin(\theta)(1 + 2\sin(\theta)) \\ \dfrac{dy}{d\theta} &= 2\cos(\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta)(1 + 2\sin(\theta)) \end{cases}$$

3. Helling raaklijn

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos(\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta)(1 + 2\sin(\theta))}{2\cos^2(\theta) - \sin(\theta)(1 + 2\sin(\theta))}$$

4. Rico bij $\theta = \pi/4$: $-2\sqrt{2} - 1$
5. Normaal:

$$y = \left(2\sqrt{2} + 1\right)^{-1}\left(x - (1 + \sqrt{2}/2)\right) + 1 + \sqrt{2}/2$$

Notes

VOORBEELD 11.11

Bepaal de normaal aan de limaçon $r = 1 + 2\sin(\theta)$ in $\theta = \pi/4$. Bepaal tevens de raaklijnen aan de grafiek ter hoogte van de pool.

Oplossing

6. θ waarvoor $r = 0$

$$1 + 2\sin(\theta) = 0 \iff \sin(\theta) = -\frac{1}{2} \iff \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

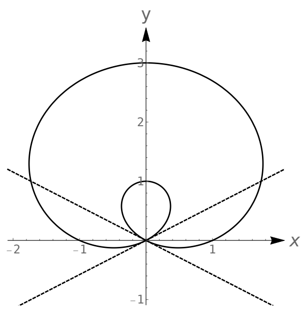
7. Raaklijnen
   1. Poolcoördinaten: $\theta = \dfrac{7\pi}{6}$ en $\theta = \dfrac{11\pi}{6}$
   2. Cartesische coördinaten: $y = \tan\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)x$ en $y = \tan\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)x$

Notes

VOORBEELD 11.11

Bepaal de normaal aan de limaçon $r = 1 + 2\sin(\theta)$ in $\theta = \pi/4$. Bepaal tevens de raaklijnen aan de grafiek ter hoogte van de pool.

Oplossing



Notes

Extra voorbeeld

Bepaal de concaviteit van de limaçon $r = 1 + 2\sin(\theta)$ indien $\theta = \pi/4$.

Oplossing

1 Gevraagd

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx}$$

2 Uit Voorbeeld 11.11

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{2\sin(2\theta) + \cos(\theta)}{2\cos(2\theta) - \sin(\theta)}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\cos^2(\theta) - \sin(\theta)(1 + 2\sin(\theta))$$

Notes

Extra voorbeeld

Bepaal de concaviteit van de limaçon $r = 1 + 2\sin(\theta)$ indien $\theta = \pi/4$.

Oplossing

3 Afgeleide van y'

$$\frac{dy'}{d\theta} = \frac{9 + 6\sin(\theta)}{(2\cos(2\theta) - \sin(\theta))^2}$$

4 Concaviteit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta} = \frac{\dfrac{9 + 6\sin(\theta)}{(2\cos(2\theta) - \sin(\theta))^2}}{2\cos^2(\theta) - \sin(\theta)(1 + 2\sin(\theta))}$$

5 Concaviteit indien $\theta = \pi/4$

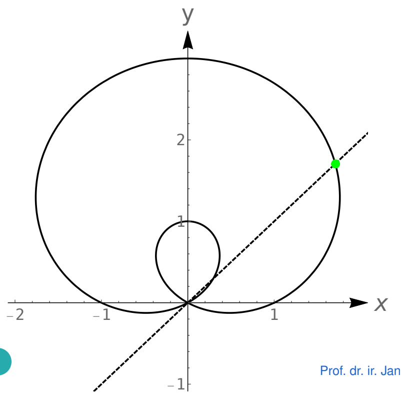
$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{-36 - 12\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Notes

Extra voorbeeld

Bepaal de concaviteit van de limaçon $r = 1 + 2\sin(\theta)$ indien $\theta = \pi/4$.

Oplossing



Notes

Even recapituleren...

Notes