Hoofdstuk 1:
Stelsels van Lineaire Vergelijkingen

- Sectie 1.1: Wat is lineaire algebra?
- Sectie 1.2: Oplossen van lineaire stelsels
- Sectie 1.3: De gereduceerde echelonvorm
- Sectie 1.4: Analyse van netwerken

Sectie 1.2: Oplossen van lineaire stelsels

Vb. Los het volgende stelsel op:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &x_1 = 2x_2 - x_3 \\ &-4(2x_2 - x_3) + 5x_2 + 9x_3 = -9 \\ &\Leftrightarrow -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -3x_2 + 13x_3 &= -9 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -3x_2 + 13x_3 &= -9 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\
x_2 - 4x_3 &= 4 \\
-3x_2 + 13x_3 &= -9
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}
$$

$$
x_2 = 4 + 4x_3 \qquad -3(4 + 4x_3) + 13x_3 = -9
$$

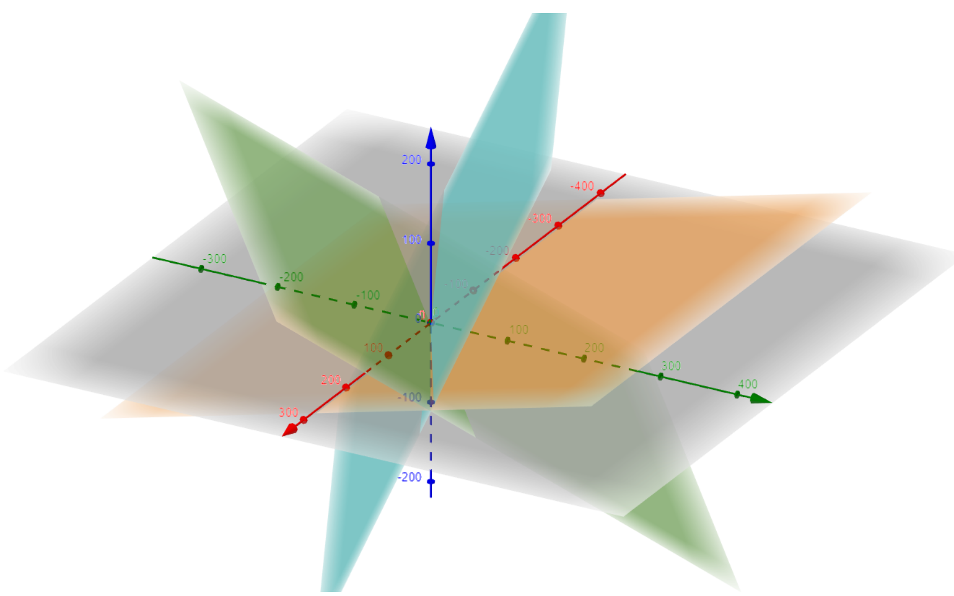
$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\
x_2 - 4x_3 &= 4 \\
x_3 &= 3
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 &= -3 \\
x_2 &= 16 \\
x_3 &= 3
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 29 \\
x_2 &= 16 \\
x_3 &= 3
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}
$$

Conclusie: ____

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\
2x_2 - 8x_3 &= 8 \\
-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9
\end{aligned}
$$



https://www.geogebra.org/3d

Definitie 1.4: Equivalente stelsels

Twee stelsels zijn equivalent als hun oplossingsverzamelingen identiek zijn.

Stelling 1.1: Bewerkingen op stelsels

Bij de volgende drie bewerkingen verandert de oplossingsverzameling van een stelsel niet:

- **Omwisseling:** Twee vergelijkingen omwisselen.
- **Herschaling:** Elke term in een vergelijking vermenigvuldigen met een getal $\alpha \neq 0$.
- **Substitutie:** Elke term in een vergelijking vermenigvuldigen met een getal α, en links en rechts deze term optellen bij een andere vergelijking.

Bewijs: alleen derde eigenschap, andere eigenschappen zie cursus

Algemene voorstelling voor een stelsel met m vergelijkingen en n variabelen:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n &= b_j \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}$$

We vermenigvuldigen de termen van vergelijking i met α en tellen deze op bij de termen van vergelijking j:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
(\alpha a_{i1} + a_{j1})x_1 + (\alpha a_{i2} + a_{j2})x_2 + \cdots + (\alpha a_{in} + a_{jn})x_n &= \alpha b_i + b_j \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}$$

S: oplossingsverzameling van het originele stelsel
T: oplossingsverzameling van het getransformeerde stelsel

T.B. $S = T \Leftrightarrow S \subseteq T \wedge T \subseteq S$

Bewijs: $S \subseteq T$.
Veronderstel dat $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots, x_n) = (\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots, \beta_n) \in S$

$$\begin{aligned}
&(\alpha a_{i1} + a_{j1})\beta_1 + (\alpha a_{i2} + a_{j2})\beta_2 + \cdots + (\alpha a_{in} + a_{jn})\beta_n \\
&\quad = (\alpha a_{i1}\beta_1 + \alpha a_{i2}\beta_2 + \cdots + \alpha a_{in}\beta_n) \\
&\qquad + (a_{j1}\beta_1 + a_{j2}\beta_2 + \cdots + a_{jn}\beta_n) \\
&\quad = \alpha(a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n) \\
&\qquad + (a_{j1}\beta_1 + a_{j2}\beta_2 + \cdots + a_{jn}\beta_n) \\
&\quad = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.
\end{aligned}$$

Bijgevolg geldt dat $(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots, \beta_n) \in T$ en $S \subseteq T$.

Bewijs: $T \subseteq S$
Veronderstel dat $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots, x_n) = (\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots, \beta_n) \in T$

$$\begin{aligned}
& a_{j1}\beta_1 + a_{j2}\beta_2 + \cdots + a_{jn}\beta_n \\
= \ & a_{j1}\beta_1 + a_{j2}\beta_2 + \cdots + a_{jn}\beta_n + \alpha b_i - \alpha b_i \\
= \ & a_{j1}\beta_1 + a_{j2}\beta_2 + \cdots + a_{jn}\beta_n + (\alpha a_{i1}\beta_1 + \alpha a_{i2}\beta_2 + \cdots + \alpha a_{in}\beta_n) \\
& \quad -\alpha b_i \\
= \ & a_{j1}\beta_1 + \alpha a_{i1}\beta_1 + a_{j2}\beta_2 + \alpha a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{jn}\beta_n + \alpha a_{in}\beta_n - \alpha b_i \\
= \ & (\alpha a_{i1} + a_{j1})\beta_1 + (\alpha a_{i2} + a_{j2})\beta_2 + \cdots + (\alpha a_{in} + a_{jn})\beta_n - \alpha b_i \\
= \ & ______________________ - \alpha b_i \\
= \ & b_j.
\end{aligned}$$

Er volgt dat $(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots, \beta_n) \in S$ en dus $T \subseteq S$.

Sectie 1.3: De gereduceerde echelonvorm

Een matrix is in gereduceerde echelonvorm als aan de volgende vier voorwaarden voldaan is:

1. Rijen die volledig uit nullen bestaan bevinden zich onderaan de matrix.
2. Het meest linkse niet-nul element van een rij is een één. (**pivot**)
3. De pivot is het enige niet-nul element in zijn kolom.
4. Als er een pivot voorkomt op positie (i, j) en (s, t), dan geldt dat als $s > i$ eveneens geldt dat $t > j$.

Voorbeelden van matrices in gereduceerde echelonvorm:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

$*$ = willekeurig element

Vb. 1.13 Bepaal of het volgende stelsel een oplossing heeft en of die oplossing uniek is.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Reductie naar gereduceerde echelonvorm:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \_\_\_\_ \\ 2 & 1 & 1 & \_\_\_\_ \\ 1 & 1 & 0 & \_\_\_\_ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vervolg:

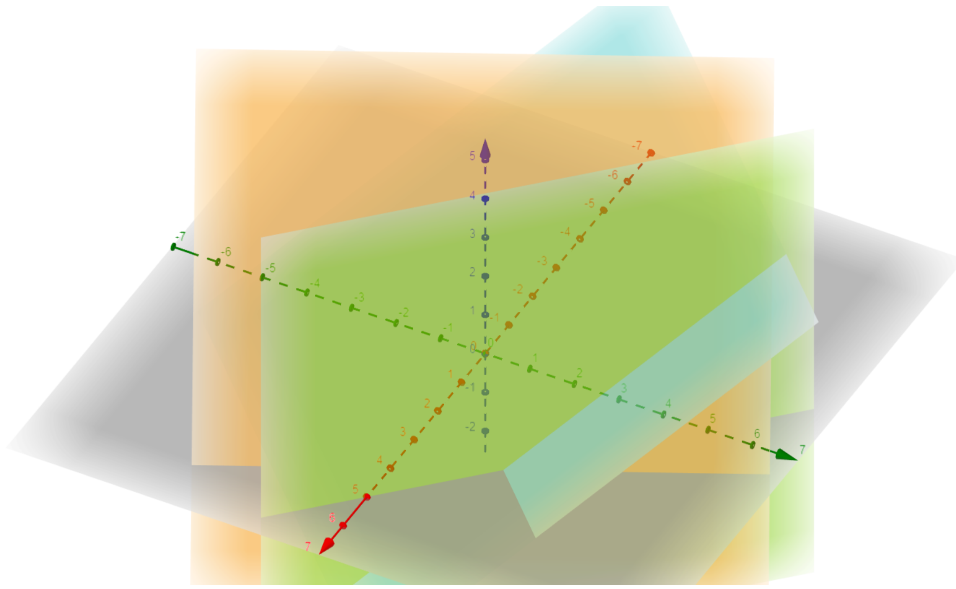
$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= \_\_\_\_ \\ x_2 - x_3 &= \_\_\_\_ \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 3 - x_3 \\ x_2 &= 2 + x_3 \end{aligned} \qquad S = \left\{ \begin{bmatrix} 3 - x_3 \\ 2 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Definitie 1.9: Afhankelijke en vrije variabelen

- Een afhankelijke variabele is een variabele die correspondeert met een pivotkolom.
- Een vrije (of onafhankelijke) variabele is een variabele die **niet** correspondeert met een pivotkolom.

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1\\
2x_1 + x_2 + x_3 &= 8\\
x_1 + x_2 &= 5
\end{aligned}
$$



https://www.geogebra.org/3d

Oef. Bepaal of het volgende stelsel een oplossing heeft en of die oplossing uniek is.

$$
\begin{aligned}
x_2 - 4x_3 &= 8\\
2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1\\
5x_1 - 8x_2 + 7x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

Definitie 1.8: Consistent stelsel

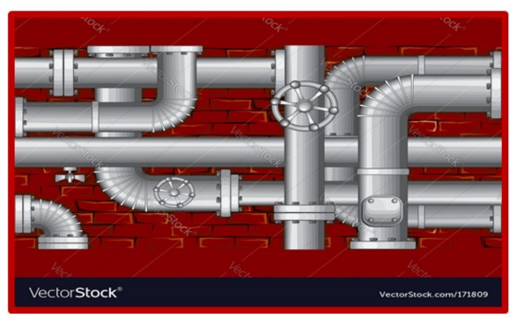
Een stelsel is **consistent** als het minstens één oplossing heeft. Als het stelsel geen oplossing heeft, dan noemen we het stelsel **inconsistent**.

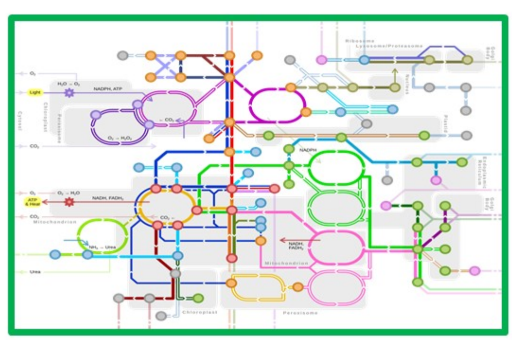
Stelling 1.5

Een stelsel is **inconsistent** als en slechts de meest rechtse kolom van de uitgebreide matrix een ________________ is.

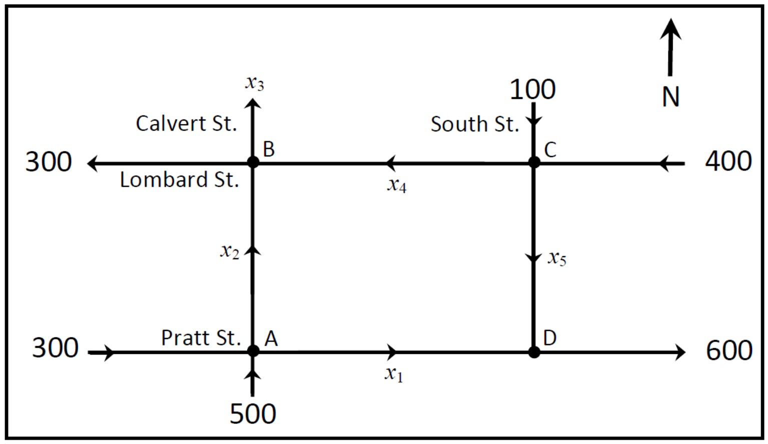
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{rrrl} 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = 1 \\ & x_2 & -4x_3 & = 8 \\ & & 0 & = 5 \end{array}$$

Sectie 1.4: Analyse van stromen in netwerken





Vb. In onderstaand verkeersnetwerk duiden pijlen stromen aan. Voor de startpunten en de eindpunten van het netwerk is de stroom (bvb. auto's per uur) gekend. Bereken de stroom in de vertakkingen aangeduid met x_1 tot x_5.



$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & \text{--------} \\
 & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & = & \text{--------} \\
 & & & & & & x_4 & + & x_5 & = & \text{--------} \\
x_1 & & & & & & & + & x_5 & = & \text{--------} \\
 & & & & x_3 & & & & & = & \text{--------}
\end{array}
$$

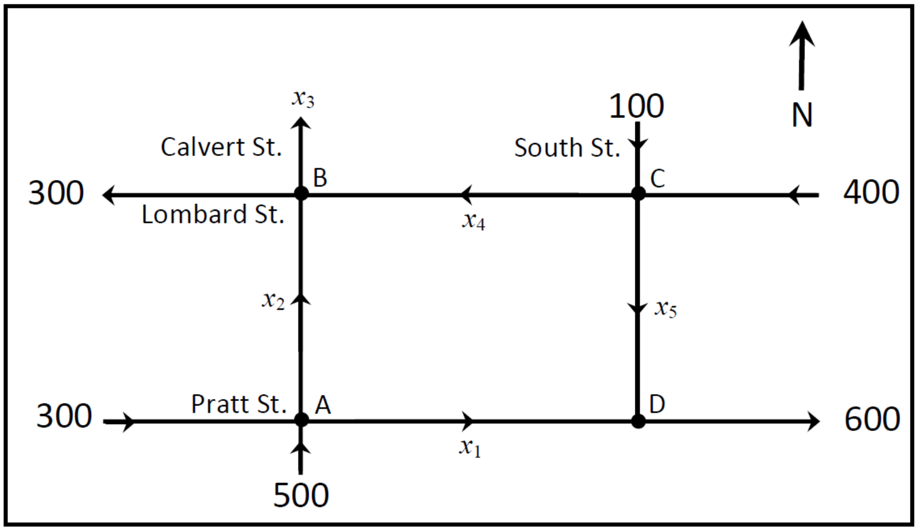
Berekening van de gereduceerde echelonvorm:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 800 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 300 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 300 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 800
\end{bmatrix}
$$

$$
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 700 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 800
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 700 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -500
\end{bmatrix}
$$

$$
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 700 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 200 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 & = & 600 - x_5 \\ x_2 & = & 200 + x_5 \\ x_3 & = & 400 \\ x_4 & = & 500 - x_5 \\ x_5 & & \text{is vrij} \end{cases}$$



Oef.

(a) Bepaal het algemene verkeerspatroon van het weergegeven autosnelwegennet (stroomsnelheden worden uitgedrukt in auto's/minuut).

(b) Bepaal het algemene verkeerspatroon als de snelweg met stroom x_5 gesloten is.

(c) Wat is de minimumwaarde voor x_4 als $x_5 = 0$?