Hoofdstuk 2: Vector- en Matrixvoorstellingen van Lineaire Stelsels

- Sectie 2.1: Vectorbewerkingen en vectorvoostellingen
- Sectie 2.2: Opspannende verzamelingen
- Sectie 2.3: Matrixvoorstelling
- Sectie 2.4: Homogene stelsels
- Sectie 2.5: Lineaire onafhankelijkheid
- Sectie 2.6: Balanceren van chemische vergelijkingen

Sectie 2.1: Vectorvergelijkingen

Algemene notatie vectoren in $\mathbb{R}^m$: $$\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

Definities 2.1 en 2.2

De som van $\vec{\boldsymbol{u}}$ en $\vec{\boldsymbol{v}}$ is de vector $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}$ bepaald door

$$[\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}]_i = [\vec{\boldsymbol{u}}]_i + [\vec{\boldsymbol{v}}]_i \qquad 1 \leq i \leq m$$

Veronderstel dat $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^m$ en $\alpha \in \mathbb{R}$. Dan is de scalaire vermenigvuldiging van $\vec{\boldsymbol{u}}$ met α de vector $\alpha\vec{\boldsymbol{u}}$ gedefinieerd door

$$[\alpha\vec{\boldsymbol{u}}]_i = \alpha[\vec{\boldsymbol{u}}]_i, \qquad 1 \leq i \leq m$$

Stelling 2.2: Eigenschappen van vectoren

Stel $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{w}$ zijn vectoren in $\mathbb{R}^m$ en c en d getallen:

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^m \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^m$	$\alpha \in \mathbb{R}, \vec{u} \in \mathbb{R}^m \Rightarrow \alpha\vec{u} \in \mathbb{R}^m$
$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$	$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$	$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$	$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$
$\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$	$1\vec{u} = \vec{u}$

Bewijs: bvb. achtste eigenschap

$$\begin{aligned}
[(\alpha + \beta)\vec{u}]_i &= (\alpha + \beta)[\vec{u}]_i \\
&= \alpha[\vec{u}]_i + \beta[\vec{u}]_i \\
&= [\alpha\vec{u}]_i + [\beta\vec{u}]_i \\
&= [\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}]_i
\end{aligned}$$

Definitie 2.3: Lineaire combinatie

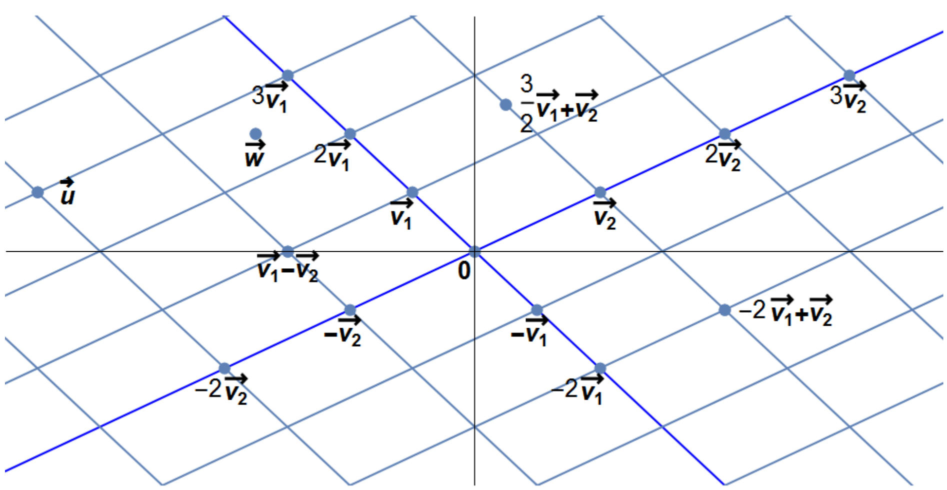
Stel $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^m$ en $c_1, ..., c_n$ getallen, dan is

$$\vec{y} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$$

de **lineaire combinatie** van $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ met gewichten $c_1, \dots, c_n$.

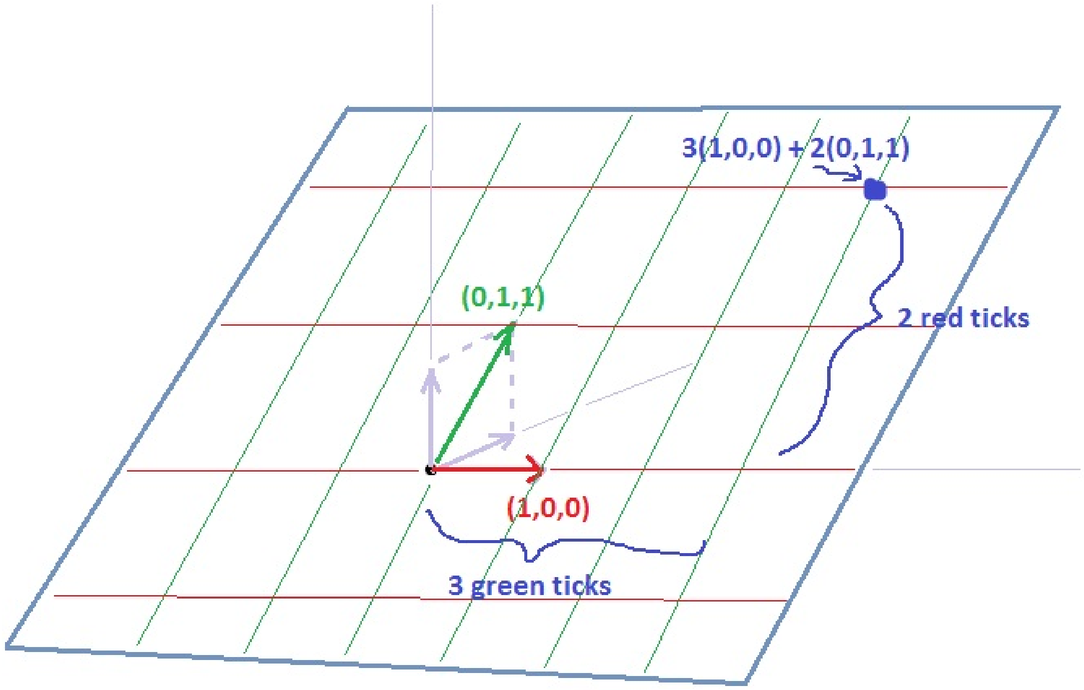
Vb. Schrijf $\vec{u}$ en $\vec{w}$ als een lineaire combinatie van $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$\vec{u} = \_\_\_\_\_\_ \vec{v}_1 \quad \_\_\_\_\_\_ \vec{v}_2 \qquad \vec{w} = \_\_\_\_\_\_ \vec{v}_1 \quad \_\_\_\_\_\_ \vec{v}_2$

Vb. Een lineaire combinatie in $\mathbb{R}^3$.



Vb. Kunnen we $\vec{\boldsymbol{b}}$ schrijven als een lineaire combinatie van de vectoren $\vec{\boldsymbol{a}}_1$ en $\vec{\boldsymbol{a}}_2$?

$$\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \vec{\boldsymbol{a}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

<u>Oplossing:</u> Los op: $x_1\vec{\boldsymbol{a}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{a}}_2 = \vec{\boldsymbol{b}}$

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{rrl} x_1 & +2x_2 & = 7 \\ -2x_1 & +5x_2 & = 4 \\ -5x_1 & +6x_2 & = -3 \end{array}$$

$$A_b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \_\_\_\_ \\ -2 & 5 & \_\_\_\_ \\ -5 & 6 & \_\_\_\_ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad x_1 = \_\_\_\_\_\_ \qquad x_2 = \_\_\_\_\_\_$$

Sectie 2.2: Opspannende verzamelingen

Definitie 2.4: Span

Stel $\vec{v}_1 ..., \vec{v}_n$ zijn vectoren in $\mathbb{R}^m$. We definiëren $\mathrm{Span}(\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\})$ als de verzameling van alle lineaire combinaties van $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$.

Vb. Stel $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

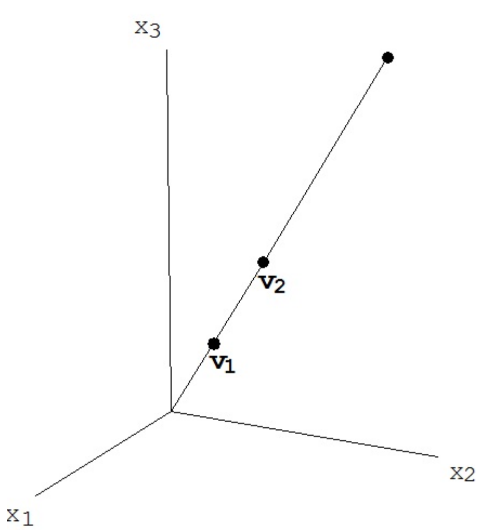
(a) Geef een vector die in $\mathrm{Span}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$ zit.

Antwoord: ______________________

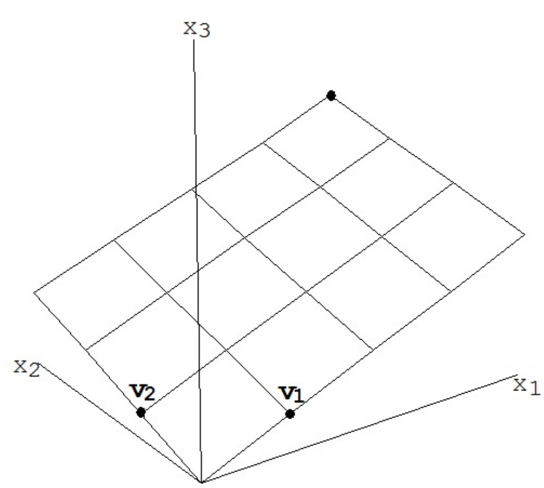
(b) Beschrijf $\mathrm{Span}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$ meetkundig.

Antwoord: ______________________

Algemener:



$\vec{v}_2$ is een veelvoud van $\vec{v}_1$
$\mathrm{Span}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$
$=$
rechte door de oorsprong



$\vec{v}_2$ is **geen** veelvoud van $\vec{v}_1$
$\mathrm{Span}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$
$=$
vlak door de oorsprong

Oef. Bepaal of $\vec{\boldsymbol{b}}$ deel uitmaakt van $\operatorname{Span}(\{\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2\})$.

$$\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{\boldsymbol{a}}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sectie 2.3: Matrixvoorstellingen

Definitie product $m \times n$ matrix en vector:

$$A\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{a}}_1 & \vec{\boldsymbol{a}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{a}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{\boldsymbol{a}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{a}}_2 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{a}}_n$$

Vb.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \\ 6 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -1x_1 \\ 6x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_2 \\ 5x_2 \\ -2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4x_3 \\ -3x_3 \\ 8x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ -1x_1 + 5x_2 - 3x_3 \\ 6x_1 - 2x_2 + 8x_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Stelling 2.3

Stel A is een $m \times n$ matrix met kolommen $\vec{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{1}}, \vec{\boldsymbol{a}}_2, ..., \vec{\boldsymbol{a}}_n$ en $\vec{\boldsymbol{b}}$ in $\mathbb{R}^m$. De matrixvergelijking

$$A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$$

heeft dezelfde oplossing als

$$x_1\vec{\boldsymbol{a}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{a}}_2 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{a}}_n = \vec{\boldsymbol{b}}$$

en dezelfde oplossing als het lineair stelsel met uitgebreide matrix

$$A_b = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{a}}_1 & \vec{\boldsymbol{a}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{a}}_n & \vec{\boldsymbol{b}} \end{bmatrix}.$$

Een uitgewerkt voorbeeld:

Als een matrixvergelijking $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \\ 6 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Als een vectorvergelijking $x_1\vec{\boldsymbol{a}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{a}}_2 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{a}}_n = \vec{\boldsymbol{b}}$:

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

In traditionele notatie:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ -1x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 6x_1 - 2x_2 + 8x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Vraag: Welke voorwaarde moet voldaan zijn opdat $A\vec{x} = \vec{b}$ een oplossing zou hebben voor elke $\vec{b}$?

Vb. 2.12 Heeft het stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ een oplossing voor elke $\vec{b}$?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Oplossing:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & \_\_\_\_ \\ -4 & 2 & -6 & \_\_\_\_ \\ -3 & -2 & -7 & \_\_\_\_ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 7 & 5 & b_3 + 3b_1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + 3b_1 - 1/2(b_2 + 4b_1) \end{bmatrix}$$

$$b_3 + 3b_1 - \frac{1}{2}(b_2 + 4b_1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad b_3 + b_1 - \frac{b_2}{2} = 0$$

Conclusie: ______________________________

Vraag — Zie Stelling 2.4

Stel $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$ is een $m \times n$ matrix.

1. De vergelijking $A\vec{x} = \vec{b}$ heeft een oplossing voor alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

Welke uitspraken zijn equivalent met uitspraak (1) ?

- ROOD: Elke $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ is een lineaire combinatie van de kolommen van A.
- GROEN: $\mathrm{Span}\left(\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n\}\right) = \mathbb{R}^m$.
- BLAUW: A heeft een pivot in elke rij.
- GEEL: A heeft een pivot in elke kolom.

Vb. 2.12 Heeft het stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ een oplossing voor elke $\vec{b}$?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Sectie 2.4: Homogene stelsels

Vb. 1.5.1 Beschrijf meetkundig de oplossingsverzameling van onderstaand homogeen stelsel.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Als een vectorvergelijking $x_1\vec{\boldsymbol{a}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{a}}_2 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{a}}_n = \vec{\boldsymbol{b}}$:

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Als een matrixvergelijking $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Als een matrixvergelijking $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_b = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & \_\_\_\_ \\ -3 & -2 & 4 & \_\_\_\_ \\ 6 & 1 & -8 & \_\_\_\_ \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \cdots \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{4}{3}x_3 &= 0 \\ x_2 &= \_\_\_\_ \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Conclusie: ____

Definitie: homogeen lineair stelsel

- Een lineair stelsel is homogeen als het kan geschreven worden als $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$.
- Zo een stelsel heeft $\vec{\boldsymbol{x}} =$ ____ als triviale oplossing.
- Andere oplossingen dan de triviale oplossing noemen we niet-triviale oplossingen.

Stelling – Vul aan!

Een homogeen stelsel heeft een niet-triviale oplossing als en slechts als het stelsel een ________________________ heeft.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sectie 2.5: Lineaire onafhankelijkheid

Definitie 2.8

Een verzameling $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ in $\mathbb{R}^m$ noemen we lineair onafhankelijk als het stelsel

$$x_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{v}}_n = \vec{\mathbf{0}}$$

enkel de triviale oplossing heeft. De verzameling noemen we lineair afhankelijk als er gewichten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bestaan, die niet allen nul zijn, zodat

$$\alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{\boldsymbol{v}}_n = \vec{\mathbf{0}}\,.$$

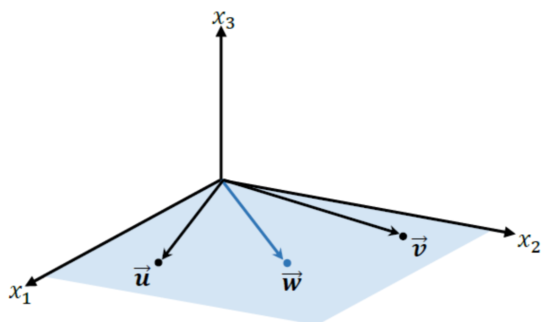
Zijn deze verzamelingen lineair onafhankelijk?

a. $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 33 \\ 77 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

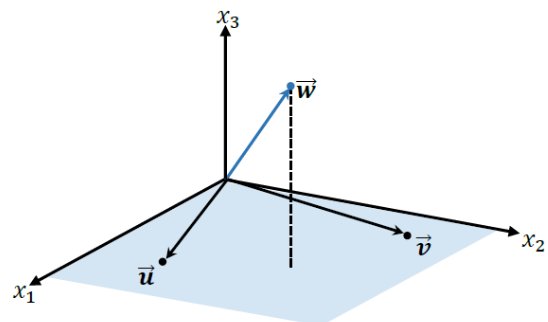
b. $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 10 \\ -14 \end{bmatrix} \right\}$

Vraag: Gegeven $\vec{u}$ en $\vec{v}$. Aan welke voorwaarde moet $\vec{w}$ voldoen opdat de verzameling $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ lineair onafhankelijk zou zijn?

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ en } \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$



lineair afhankelijk
$\vec{w} \in \mathrm{Span}\,(\{\vec{u}, \vec{v}\})$



lineair onafhankelijk
$\vec{w} \notin \mathrm{Span}\,(\{\vec{u}, \vec{v}\})$

Geef een $\vec{w}$ zodat $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ lineair afhankelijk is: $\vec{w} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix}$

Vb. 2.17 Is de verzameling S lineair onafhankelijk?

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

<u>Oplossing:</u> los dit stelsel op

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{0}}$$

Stelling 2.7

De kolommen van een matrix A zijn lineair onafhankelijk als en slechts als $A\vec{x} = \vec{\mathbf{0}}$ alleen ______________________________ heeft.

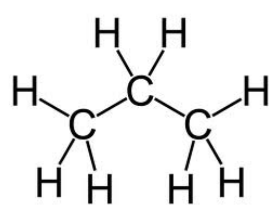
$$A_b = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

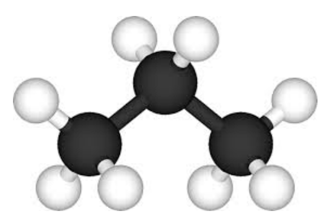
$$\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_4 \\ -4x_4 \\ 3x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stel $x_4 = 1$, dan geldt:

$$2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-4) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{0}}$$

Sectie 2.6: Balanceren van chemische vergelijkingen





$$(x_1)C_3H_8 + (x_2)O_2 \to (x_3)CO_2 + (x_4)H_2O$$

	C_3H_8	O_2	CO_2	H_2O
Koolstof-atomen	3	0	1	0
Waterstof-atomen	8	0	0	2
Zuurstof-atomen	0	2	2	1

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} \text{----} \\ \text{----} \\ \text{----} \end{bmatrix}$$

$$x_1 \begin{bmatrix}3\\8\\0\end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$x_1 \begin{bmatrix}3\\8\\0\end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix}-1\\0\\-2\end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix}0\\-2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\_\_\_\_\\\_\_\_\_\\\_\_\_\_\end{bmatrix}$$

Traditionele notatie:
$$\begin{array}{lllll} 3x_1 & +0x_2 & -1x_3 & +0x_4 & = 0 \\ 8x_1 & +0x_2 & +0x_3 & -2x_4 & = 0 \\ 0x_1 & +2x_2 & -2x_3 & -1x_4 & = 0 \end{array}$$

Matrixnotatie:
$$\begin{bmatrix}3 & 0 & -1 & 0\\8 & 0 & 0 & -2\\0 & 2 & -2 & -1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Algemene notatie: $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$

Traditionele notatie:
$$\begin{array}{lllll} 3x_1 & +0x_2 & -1x_3 & +0x_4 & = 0 \\ 8x_1 & +0x_2 & +0x_3 & -2x_4 & = 0 \\ 0x_1 & +2x_2 & -2x_3 & -1x_4 & = 0 \end{array}$$

$$[A \quad \vec{\boldsymbol{b}}] = \begin{bmatrix}3 & 0 & -1 & 0 & \_\_\_\_\\8 & 0 & 0 & -2 & \_\_\_\_\\0 & 2 & -2 & -1 & \_\_\_\_\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1/4 & 0\\0 & 1 & 0 & -5/4 & 0\\0 & 0 & 1 & -3/4 & 0\end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{4}x_4 \qquad x_2 = \frac{5}{4}x_4 \qquad x_3 = \frac{3}{4}x_4$$

$$(x_1)C_3H_8 + (x_2)O_2 \to (x_3)CO_2 + (x_4)H_2O$$

$$\_\_\_\, C_3H_8 + \_\_\_\, O_2 \to \_\_\_\, CO_2 + \_\_\_\, H_2O$$

Oef. Balanceer de gegeven chemische vergelijking.

$$x_1 Al_2O_3 + x_2 C \;\rightarrow\; x_3 Al + x_4 CO_2$$