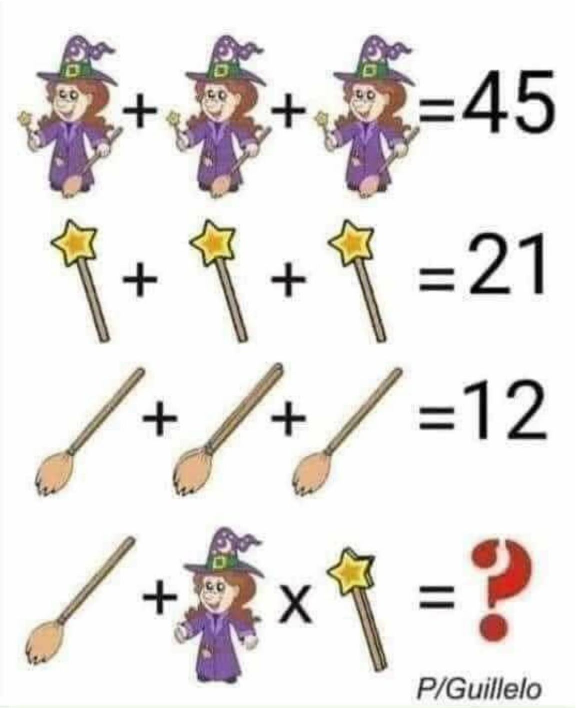

冨嶽三十六景
神奈川沖浪裏


+ + =45
+ + =21
+ + =12
+ x =
P/Guillelo

Hoofdstuk 1:
Stelsels van Lineaire Vergelijkingen

1.2: Oplossen van lineaire stelsels

Vb. 1.2 Beschrijf de oplossingsverzameling van onderstaande stelsels.

a

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ \quad x - y = 4 \end{cases}$$

1.2: Oplossen van lineaire stelsels

Vb. 1.2 Beschrijf de oplossingsverzameling van onderstaande stelsels.

a

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ \quad x - y = 4 \end{cases}$$

b

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 4x + 6y = 6 \end{cases}$$

1.2: Oplossen van lineaire stelsels

Vb. 1.2 Beschrijf de oplossingsverzameling van onderstaande stelsels.

a

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

b

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 4x + 6y = 6 \end{cases}$$

c

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$$

Vb.

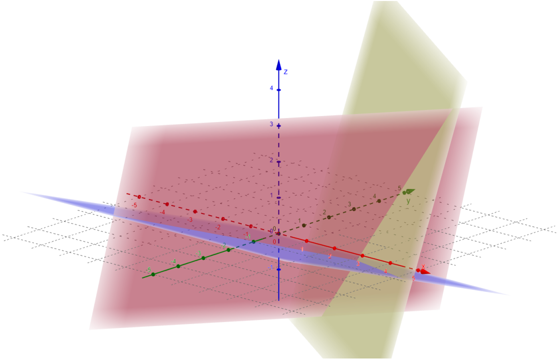
Los het volgende stelsel op:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 9 \\ y + 3z = -1 \\ 4x - 3y - 4z = 2 \end{cases}$$

Vb.

Los het volgende stelsel op:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 9 \\ \qquad\quad y + 3z = -1 \\ 4x - 3y - 4z = 2 \end{cases}$$



https://www.geogebra.org/3d

Definitie 1.4: Equivalente stelsels

Twee stelsels zijn equivalent als hun oplossingsverzamelingen identiek zijn.

Definitie 1.4: Equivalente stelsels

Twee stelsels zijn equivalent als hun oplossingsverzamelingen identiek zijn.

Stelling 1.1: Bewerkingen op stelsels

Bij de volgende drie bewerkingen verandert de oplossingsverzameling van een stelsel niet:

- **Omwisseling:** Twee vergelijkingen omwisselen.

Definitie 1.4: Equivalente stelsels

Twee stelsels zijn equivalent als hun oplossingsverzamelingen identiek zijn.

Stelling 1.1: Bewerkingen op stelsels

Bij de volgende drie bewerkingen verandert de oplossingsverzameling van een stelsel niet:

- **Omwisseling:** Twee vergelijkingen omwisselen.
- **Herschaling:** Elke term in een vergelijking vermenigvuldigen met een getal $\alpha \neq 0$.

Definitie 1.4: Equivalente stelsels

Twee stelsels zijn equivalent als hun oplossingsverzamelingen identiek zijn.

Stelling 1.1: Bewerkingen op stelsels

Bij de volgende drie bewerkingen verandert de oplossingsverzameling van een stelsel niet:

- **Omwisseling:** Twee vergelijkingen omwisselen.
- **Herschaling:** Elke term in een vergelijking vermenigvuldigen met een getal $\alpha \neq 0$.
- **Substitutie:** Elke term in een vergelijking vermenigvuldigen met een getal α, en links en rechts deze term optellen bij een andere vergelijking.

1.3: De rij-gereduceerde echelonvorm

Voor een stelsel van lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

1.3: De rij-gereduceerde echelonvorm

Voor een stelsel van lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

is de **uitgebreide matrix**

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Via **rij-operaties** op de uitgebreide matrix kan een stelsel efficiënt opgelost worden:

- $R_i \leftrightarrow R_j$: rijen i en j omwisselen

Via **rij-operaties** op de uitgebreide matrix kan een stelsel efficiënt opgelost worden:

- $R_i \leftrightarrow R_j$: rijen i en j omwisselen
- αR_i: rij i vermenigvuldigen met een constante $\alpha \neq 0$

Via **rij-operaties** op de uitgebreide matrix kan een stelsel efficiënt opgelost worden:

- $R_i \leftrightarrow R_j$: rijen i en j omwisselen
- αR_i: rij i vermenigvuldigen met een constante $\alpha \neq 0$
- $R_j + \alpha R_i$: rij i vermenigvuldigen met een constante α, en dit optellen bij rij j

Via **rij-operaties** op de uitgebreide matrix kan een stelsel efficiënt opgelost worden:

- $R_i \leftrightarrow R_j$: rijen i en j omwisselen
- αR_i: rij i vermenigvuldigen met een constante $\alpha \neq 0$
- $R_j + \alpha R_i$: rij i vermenigvuldigen met een constante α, en dit optellen bij rij j

Vb.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 9 \\ \quad\quad\;\; y + 3z = -1 \\ 4x - 3y - 4z = 2 \end{cases}$$

Een matrix is in **rij-gereduceerde echelonvorm** als aan de volgende vier voorwaarden voldaan is:

1. Nulrijen zitten onderaan.
2. Het meest linkse niet-nul element van een rij is een $\mathbf{1}$. (pivot, spil, leidende 1)
3. De pivot is het enige niet-nul element in zijn kolom.
4. De pivots volgen een trapvorm (formele beschrijving: zie cursus).

Voorbeelden van matrices in rij-gereduceerde echelonvorm:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & * & * \\ 0 & \mathbf{1} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccccccccc|c} 0 & \mathbf{1} & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & * \end{array}\right]$$

$*=$ willekeurig element

Stelling 1.3 Rij-Gereduceerde Echelonvorm is Uniek

Veronderstel dat A een $m \times n$ matrix is en dat B en C $m \times n$ matrices zijn die rij-equivalent zijn met A en die beide in rij-gereduceerde echelonvorm staan. Dan geldt $B = C$.

Stelling 1.3 Rij-Gereduceerde Echelonvorm is Uniek

Veronderstel dat A een $m \times n$ matrix is en dat B en C $m \times n$ matrices zijn die rij-equivalent zijn met A en die beide in rij-gereduceerde echelonvorm staan. Dan geldt $B = C$.

Maar de weg ernaartoe (volgorde van rij-operaties) kan verschillen.

Voorbeelden van matrices in (niet-rij-gereduceerde) **echelonvorm**:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccccccccc|c} 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right]$$

$*$ = willekeurig element

Voorbeelden van matrices in (niet-rij-gereduceerde) **echelonvorm**:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccccccccc|c} 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right]$$

$*$ = willekeurig element

Deze vorm

- is niet uniek
- vraagt minder werk
- volstaat voor vele oefeningen

Vb. 1.13

Los het onderstaande stelsel op:

- Stel de uitgebreide matrix op.
- Reduceer.
- Beschrijf de oplossingsverzameling.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 8 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Vb. 1.13

Los het onderstaande stelsel op:

- Stel de uitgebreide matrix op.
- Reduceer.
- Beschrijf de oplossingsverzameling.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 8 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

<u>Oplossing:</u>

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad S = \left\{ \begin{bmatrix} 3 - z \\ 2 + z \\ z \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

Definitie 1.8: Consistent stelsel

Een stelsel is consistent als het minstens één oplossing heeft. Als het stelsel geen oplossing heeft, dan noemen we het stelsel inconsistent.

Definitie 1.8: Consistent stelsel

Een stelsel is consistent als het minstens één oplossing heeft. Als het stelsel geen oplossing heeft, dan noemen we het stelsel inconsistent.

Op het zicht

Horen deze gereduceerde matrices bij een consistent of een inconsistent stelsel?

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Definitie 1.8: Consistent stelsel

Een stelsel is consistent als het minstens één oplossing heeft. Als het stelsel geen oplossing heeft, dan noemen we het stelsel inconsistent.

Op het zicht

Horen deze gereduceerde matrices bij een consistent of een inconsistent stelsel?

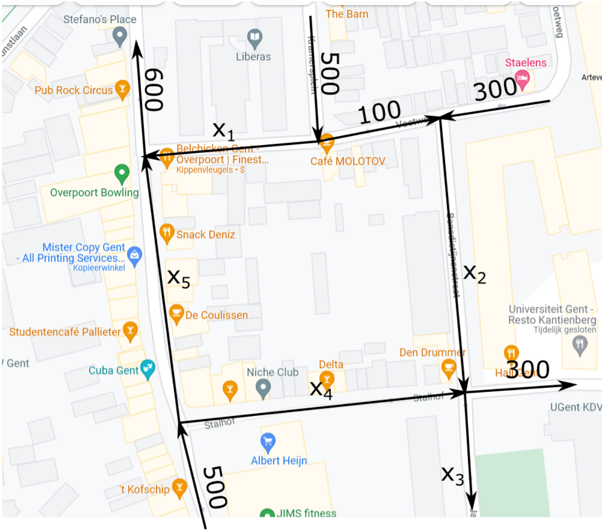
$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Stelling 1.5

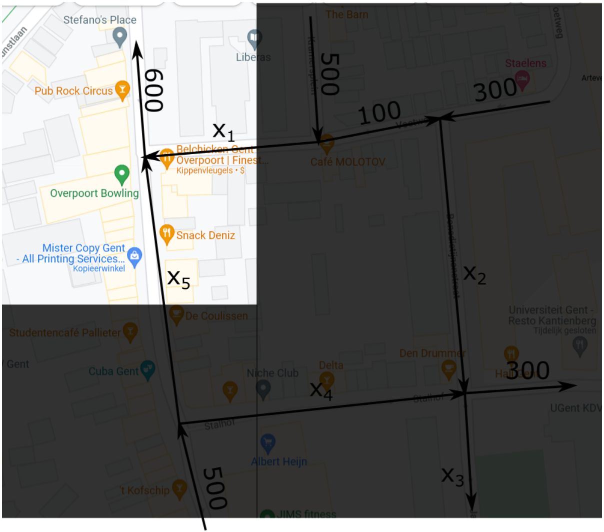
Een stelsel is inconsistent als en slechts de meest rechtse kolom van de uitgebreide matrix een pivotkolom is.

1.4: Analyse van stromen in netwerken

Bereken de stroom (aantal voetgangers per uur) in de vertakkingen aangeduid met x_1 tot x_5.

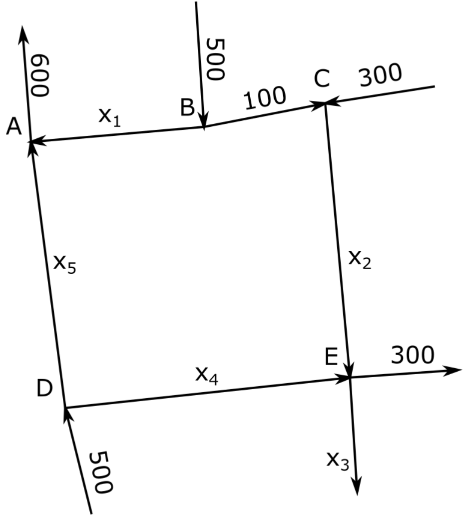


In een knooppunt: som van de ingaande stromen = som van de uitgaande stromen

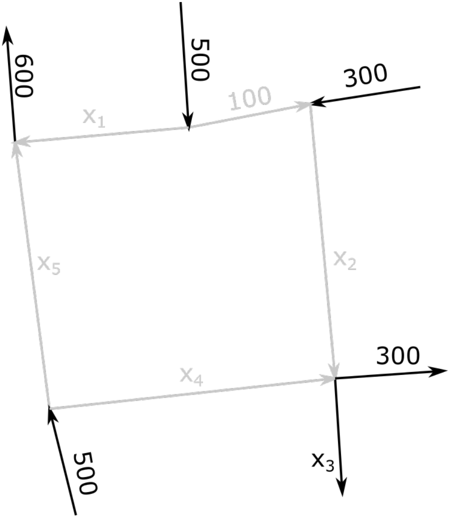


$$x_1 + x_5 = 600$$

In een knooppunt: som van de ingaande stromen = som van de uitgaande stromen



Over het ganse netwerk: som van de ingaande stromen = som van de uitgaande stromen



$$500 + 300 + 500 = 600 + 300 + x_3$$


冨嶽三十六景
神奈川沖浪裏


冨嶽三十六景
神奈川沖浪裏

Hoofdstuk 2: Vector- en Matrixvoorstellingen van Lineaire Stelsels

2.1: Vectorbewerkingen en -voorstellingen

$\mathbb{R}^m$ is de verzameling van alle kolomvectoren met m componenten.

Bv.

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3.14 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

2.1: Vectorbewerkingen en -voorstellingen

$\mathbb{R}^m$ is de verzameling van alle kolomvectoren met m componenten.

Bv.

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3.14 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Bereken

- $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}$
- $6\vec{\boldsymbol{u}}$

2.1: Vectorbewerkingen en -voorstellingen

$\mathbb{R}^m$ is de verzameling van alle kolomvectoren met m componenten.

Bv.

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3.14 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Bereken

- $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}$
- $6\vec{\boldsymbol{u}}$

<u>Oplossing:</u> $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 6.14 \end{bmatrix}, 6\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$

Definitie 2.3: Scalair Product van Kolomvectoren

$$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{m} [\vec{\boldsymbol{u}}]_i \cdot [\vec{\boldsymbol{v}}]_i$$

Definitie 2.3: Scalair Product van Kolomvectoren

$$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{m} [\vec{\boldsymbol{u}}]_i \cdot [\vec{\boldsymbol{v}}]_i$$

Bereken het scalair product van onderstaande vectoren

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Definitie 2.3: Scalair Product van Kolomvectoren

$$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{m} [\vec{\boldsymbol{u}}]_i \cdot [\vec{\boldsymbol{v}}]_i$$

Bereken het scalair product van onderstaande vectoren

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \\ -8 \end{bmatrix}$$

<u>Oplossing:</u> $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-7) + 4 \cdot (-8) = -36$

Definitie 2.4: L2-norm van een Kolomvector

$$\|\vec{\boldsymbol{u}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} [\vec{\boldsymbol{u}}]_i^2}$$

Definitie 2.4: L2-norm van een Kolomvector

$$\|\vec{\boldsymbol{u}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} [\vec{\boldsymbol{u}}]_i^2}$$

Opmerkingen:

- Verband met scalair product $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{m} [\vec{\boldsymbol{u}}]_i \cdot [\vec{\boldsymbol{v}}]_i$

Definitie 2.4: L2-norm van een Kolomvector

$$\|\vec{\boldsymbol{u}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} [\vec{\boldsymbol{u}}]_i^2}$$

Opmerkingen:

- Verband met scalair product $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{m} [\vec{\boldsymbol{u}}]_i \cdot [\vec{\boldsymbol{v}}]_i$
- Meetkundige interpretatie

Stelling 2.2-3: Eigenschappen van vectoren

Commutativiteit, associativiteit, neutraal element,...

$\rightarrow$ Zelfstudie

Definitie 2.5: Lineaire combinatie

$$\vec{\boldsymbol{y}} = c_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \cdots + c_n\vec{\boldsymbol{v}}_n$$

Definitie 2.5: Lineaire combinatie

$$\vec{\boldsymbol{y}} = c_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \cdots + c_n\vec{\boldsymbol{v}}_n$$

Voorbeeld

Gegeven

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Bereken

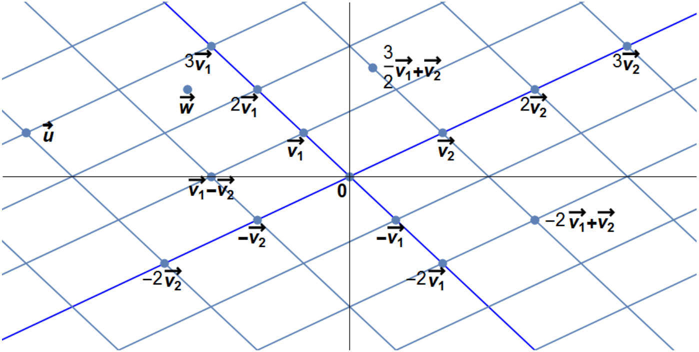
$$2\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}$$

Voorbeeld
Kunnen we $\vec{\boldsymbol{b}}$ schrijven als een lineaire combinatie van de vectoren $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ en $\vec{\boldsymbol{v}}_2$?

$$\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

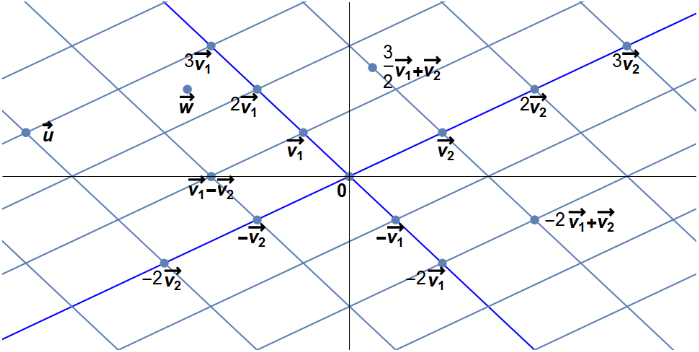
$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

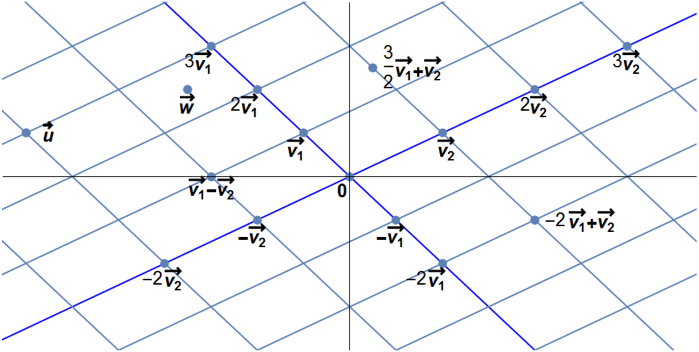


Vul in:

$$\vec{u} = \_\_\_\_\_\_\,\vec{v}_1 \quad \_\_\_\_\_\_\,\vec{v}_2$$
$$\vec{w} = \_\_\_\_\_\_\,\vec{v}_1 \quad \_\_\_\_\_\_\,\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



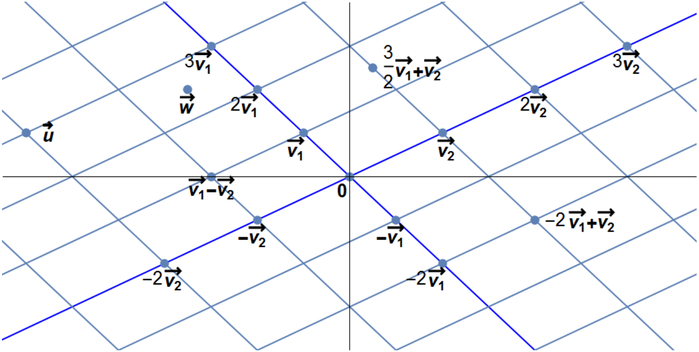
Vul in:

$$\vec{u} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$$

$$\vec{w} = \_\_\_\_\_\_\,\vec{v}_1 \quad \_\_\_\_\_\_\,\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Vul in:

$$\vec{u} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$$

$$\vec{w} = \frac{5}{2}\vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2$$

2.2: Opspannende verzamelingen

Definitie 2.6: Span

$$\mathrm{Span}\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, ..., \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$$

is de verzameling van alle lineaire combinaties van $\vec{\boldsymbol{v}}_1, ..., \vec{\boldsymbol{v}}_n$.

2.2: Opspannende verzamelingen

Definitie 2.6: Span

$$\text{Span}\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, ..., \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$$

is de verzameling van alle lineaire combinaties van $\vec{\boldsymbol{v}}_1, ..., \vec{\boldsymbol{v}}_n$.

Voorbeeld in $\mathbb{R}^2$

Stel $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ en $\vec{\boldsymbol{v}}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

(a) Geef enkele vectoren die in $\text{Span}\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$ zitten.

2.2: Opspannende verzamelingen

Definitie 2.6: Span

$$\mathrm{Span}\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, ..., \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$$

is de verzameling van alle lineaire combinaties van $\vec{\boldsymbol{v}}_1, ..., \vec{\boldsymbol{v}}_n$.

Voorbeeld in $\mathbb{R}^2$

Stel $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ en $\vec{\boldsymbol{v}}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

(a) Geef enkele vectoren die in $\mathrm{Span}\,\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$ zitten.
(b) Beschrijf $\mathrm{Span}\,\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$ meetkundig.

2.2: Opspannende verzamelingen

Definitie 2.6: Span

$$\mathrm{Span}\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, ..., \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$$

is de verzameling van alle lineaire combinaties van $\vec{\boldsymbol{v}}_1, ..., \vec{\boldsymbol{v}}_n$.

Voorbeeld in $\mathbb{R}^2$

Stel $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ en $\vec{\boldsymbol{v}}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

(a) Geef enkele vectoren die in $\mathrm{Span}\,\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$ zitten.
(b) Beschrijf $\mathrm{Span}\,\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$ meetkundig.
(c) Geef enkele vectoren die in $\mathrm{Span}\,\{\vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_3\}$ zitten.

2.2: Opspannende verzamelingen

Definitie 2.6: Span

$$\mathrm{Span}\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, ..., \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$$

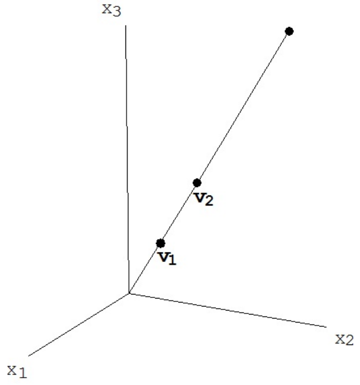
is de verzameling van alle lineaire combinaties van $\vec{\boldsymbol{v}}_1, ..., \vec{\boldsymbol{v}}_n$.

Voorbeeld in $\mathbb{R}^2$

Stel $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ en $\vec{\boldsymbol{v}}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

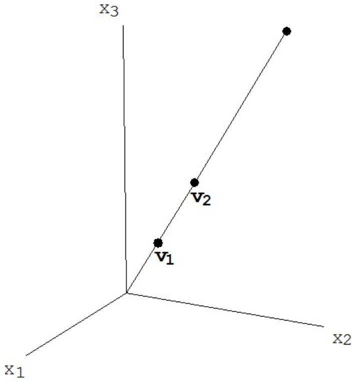
(a) Geef enkele vectoren die in $\mathrm{Span}\,\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$ zitten.
(b) Beschrijf $\mathrm{Span}\,\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$ meetkundig.
(c) Geef enkele vectoren die in $\mathrm{Span}\,\{\vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_3\}$ zitten.
(d) Beschrijf $\mathrm{Span}\,\{\vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_3\}$ meetkundig.

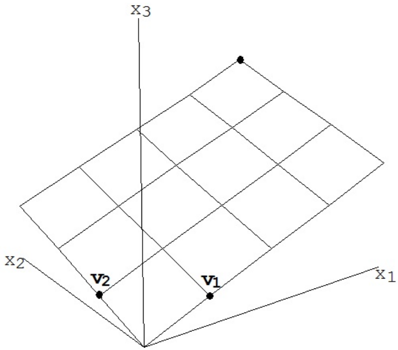
Span van 2 vectoren uit $\mathbb{R}^3$



$\vec{\boldsymbol{v}}_2$ is een veelvoud van $\vec{\boldsymbol{v}}_1$
$\mathrm{Span}\ \{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$ is een rechte door de oorsprong

Span van 2 vectoren uit $\mathbb{R}^3$





$\vec{\boldsymbol{v}}_2$ is een veelvoud van $\vec{\boldsymbol{v}}_1$
$\operatorname{Span}\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$ is een rechte door de oorsprong

$\vec{\boldsymbol{v}}_2$ is **geen** veelvoud van $\vec{\boldsymbol{v}}_1$
$\operatorname{Span}\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$ is een vlak door de oorsprong

Span van 3 vectoren uit $\mathbb{R}^3$

Drie mogelijkheden:

Span van 3 vectoren uit $\mathbb{R}^3$

Drie mogelijkheden:

- Alledrie op dezelfde lijn: $\mathrm{Span}(S)$ is die lijn.
- Alledrie in hetzelfde vlak: $\mathrm{Span}(S)$ is dat vlak.
- Geen drie in hetzelfde vlak: $\mathrm{Span}(S)$ is de 3D-ruimte ($\mathbb{R}^3$).

Span van 3 vectoren uit $\mathbb{R}^3$

Drie mogelijkheden:

- Alledrie op dezelfde lijn: $\mathrm{Span}(S)$ is die lijn.
- Alledrie in hetzelfde vlak: $\mathrm{Span}(S)$ is dat vlak.
- Geen drie in hetzelfde vlak: $\mathrm{Span}(S)$ is de 3D-ruimte ($\mathbb{R}^3$).

Span van 4 vectoren uit $\mathbb{R}^4$

Vier mogelijkheden:

- ...

Sectie 2.3: Matrixvoorstelling van Lineaire Stelsels

Matrix samengesteld uit kolomvectoren

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Sectie 2.3: Matrixvoorstelling van Lineaire Stelsels

Matrix samengesteld uit kolomvectoren

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{a}}_1 & \vec{\boldsymbol{a}}_2 & \vec{\boldsymbol{a}}_3 \end{bmatrix}$$

met

$$\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{a}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{a}}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Definitie 2.7: Matrix-vector product

$$
\begin{aligned}
A\vec{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{a}}_1 & \vec{\boldsymbol{a}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{a}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= x_1\vec{\boldsymbol{a}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{a}}_2 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{a}}_n
\end{aligned}
$$

Definitie 2.7: Matrix-vector product

$$\begin{aligned} A\vec{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{a}}_1 & \vec{\boldsymbol{a}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{a}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1\vec{\boldsymbol{a}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{a}}_2 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{a}}_n \end{aligned}$$

Vb.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Definitie 2.7: Matrix-vector product

$$\begin{aligned} A\vec{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{a}}_1 & \vec{\boldsymbol{a}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{a}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1\vec{\boldsymbol{a}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{a}}_2 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{a}}_n \end{aligned}$$

Vb.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Doordenkertje

Wat is het verband met het scalair product van twee vectoren?

Stelling 2.4

$$A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$$

Stelling 2.4

$$A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1\vec{\boldsymbol{a}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{a}}_2 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{a}}_n = \vec{\boldsymbol{b}}$$

Stelling 2.4

$$A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1\vec{\boldsymbol{a}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{a}}_2 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{a}}_n = \vec{\boldsymbol{b}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Een uitgewerkt voorbeeld

Als een matrixvergelijking:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Een uitgewerkt voorbeeld

Als een matrixvergelijking:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Als een vectorvergelijking:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Een uitgewerkt voorbeeld

Als een matrixvergelijking:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Als een vectorvergelijking:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Als een stelsel:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = -2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = -3 \end{cases}$$

Vraag

Gegeven

- $A = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{a}}_1 & \cdots & \vec{\boldsymbol{a}}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ heeft een oplossing voor alle $\vec{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$.

Welke uitspraken zijn hiermee equivalent?

1. Elke $\vec{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$ is een lineaire combinatie van de kolommen van A.
2. $\mathrm{Span}\left(\{\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \cdots, \vec{\boldsymbol{a}}_n\}\right) = \mathbb{R}^m$
3. A heeft een pivot in elke rij.
4. A heeft een pivot in elke kolom.

Vraag

Gegeven

- $A = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{1}} & \cdots & \vec{\boldsymbol{a}}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ heeft een oplossing voor alle $\vec{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$.

Welke uitspraken zijn hiermee equivalent?

1. Elke $\vec{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$ is een lineaire combinatie van de kolommen van A.
2. $\mathrm{Span}\left(\{\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \cdots, \vec{\boldsymbol{a}}_n\}\right) = \mathbb{R}^m$
3. A heeft een pivot in elke rij.
4. A heeft een pivot in elke kolom.

Oplossing: 1, 2 en 3.
(Zie Stelling 2.5)

Sectie 2.4: Homogene stelsels

Oefening

Beschrijf de oplossingsverzameling van onderstaand stelsel.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Sectie 2.4: Homogene stelsels

Oefening

Beschrijf de oplossingsverzameling van onderstaand stelsel.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Oplossing: $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Definitie 2.8: Homogeen lineair stelsel

- Een lineair stelsel is homogeen als het kan geschreven worden als $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$.

Definitie 2.8: Homogeen lineair stelsel

- Een lineair stelsel is homogeen als het kan geschreven worden als $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$.
- Zo'n stelsel heeft altijd $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ als triviale oplossing.

Definitie 2.8: Homogeen lineair stelsel

- Een lineair stelsel is homogeen als het kan geschreven worden als $A\vec{x} = \vec{0}$.
- Zo'n stelsel heeft altijd $\vec{x} = \vec{0}$ als triviale oplossing.
- Andere oplossingen noemen we niet-triviale oplossingen.

Definitie 2.8: Homogeen lineair stelsel

- Een lineair stelsel is homogeen als het kan geschreven worden als $A\vec{x} = \vec{0}$.
- Zo'n stelsel heeft altijd $\vec{x} = \vec{0}$ als triviale oplossing.
- Andere oplossingen noemen we niet-triviale oplossingen.

Doordenkertje

Gegeven: $A\vec{x} = \vec{0}$ heeft een niet-triviale oplossing.

Waar of niet: er zijn oneindig veel oplossingen.

Definitie 2.8: Homogeen lineair stelsel

- Een lineair stelsel is homogeen als het kan geschreven worden als $A\vec{x} = \vec{0}$.
- Zo'n stelsel heeft altijd $\vec{x} = \vec{0}$ als triviale oplossing.
- Andere oplossingen noemen we niet-triviale oplossingen.

Doordenkertje

Gegeven: $A\vec{x} = \vec{0}$ heeft een niet-triviale oplossing.

Waar of niet: er zijn oneindig veel oplossingen.

Oplossing: Waar. Bijvoorbeeld alle veelvouden van de gegeven oplossing zijn ook oplossingen.

Sectie 2.5: Lineaire onafhankelijkheid

Definitie 2.10

- $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ is lineair onafhankelijk als het stelsel

$$x_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{v}}_n = \vec{\mathbf{0}}$$

  enkel de triviale oplossing heeft.

Sectie 2.5: Lineaire onafhankelijkheid

Definitie 2.10

- $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ is lineair onafhankelijk als het stelsel
$$x_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{v}}_n = \vec{\mathbf{0}}$$
enkel de triviale oplossing heeft.
- $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ is lineair afhankelijk als er gewichten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bestaan, die niet allen nul zijn, zodat
$$\alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{\boldsymbol{v}}_n = \vec{\mathbf{0}}\,.$$

Sectie 2.5: Lineaire onafhankelijkheid

Definitie 2.10

- $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ is lineair onafhankelijk als het stelsel

$$x_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{v}}_n = \vec{\mathbf{0}}$$

  enkel de triviale oplossing heeft.
- $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ is lineair afhankelijk als er gewichten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bestaan, die niet allen nul zijn, zodat

$$\alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{\boldsymbol{v}}_n = \vec{\mathbf{0}}\,.$$

M.a.w. er is minstens één vector die kan geschreven worden als lineaire combinatie van de andere.

Sectie 2.5: Lineaire onafhankelijkheid

Definitie 2.10

- $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ is lineair onafhankelijk als het stelsel
$$x_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{v}}_n = \vec{\mathbf{0}}$$
enkel de triviale oplossing heeft.
- $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ is lineair afhankelijk als er gewichten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bestaan, die niet allen nul zijn, zodat
$$\alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{\boldsymbol{v}}_n = \vec{\mathbf{0}}\,.$$

M.a.w. er is minstens één vector die kan geschreven worden als lineaire combinatie van de andere.

Stel $\alpha_2 \neq 0$, dan $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\vec{\boldsymbol{v}}_1 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_2}\vec{\boldsymbol{v}}_n$

Definitie 2.10

- $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ is lineair onafhankelijk als het stelsel
$$x_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{v}}_n = \vec{\mathbf{0}}$$
enkel de triviale oplossing heeft.
- $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ is lineair afhankelijk als er gewichten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bestaan, die niet allen nul zijn, zodat
$$\alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{\boldsymbol{v}}_n = \vec{\mathbf{0}}\,.$$

Zijn deze verzamelingen lineair afhankelijk?

a. $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 33 \\ 77 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Definitie 2.10

- $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ is lineair onafhankelijk als het stelsel

$$x_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{v}}_n = \vec{\mathbf{0}}$$

  enkel de triviale oplossing heeft.
- $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ is lineair afhankelijk als er gewichten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bestaan, die niet allen nul zijn, zodat

$$\alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{\boldsymbol{v}}_n = \vec{\mathbf{0}}\,.$$

Zijn deze verzamelingen lineair afhankelijk?

a. $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 33 \\ 77 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

b. $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 10 \\ -14 \end{bmatrix} \right\}$

Definitie 2.10

- $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ is lineair onafhankelijk als het stelsel
$$x_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{v}}_n = \vec{\mathbf{0}}$$
enkel de triviale oplossing heeft.
- $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ is lineair afhankelijk als er gewichten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bestaan, die niet allen nul zijn, zodat
$$\alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{\boldsymbol{v}}_n = \vec{\mathbf{0}}\,.$$

Zijn deze verzamelingen lineair afhankelijk?

a. $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 33 \\ 77 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

b. $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 10 \\ -14 \end{bmatrix} \right\}$

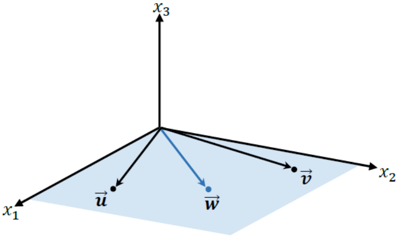
Oplossing: a. Ja. b. Ja.

Vraag: Gegeven $\vec{u}$ en $\vec{v}$. Aan welke voorwaarde moet $\vec{w}$ voldoen opdat de verzameling $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ lineair onafhankelijk zou zijn?

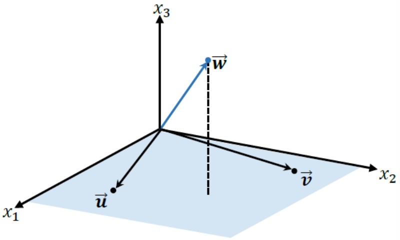
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ en } \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vraag: Gegeven $\vec{u}$ en $\vec{v}$. Aan welke voorwaarde moet $\vec{w}$ voldoen opdat de verzameling $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ lineair onafhankelijk zou zijn?

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ en } \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$



lineair afhankelijk
$\vec{w} \in \mathrm{Span}\left(\{\vec{u}, \vec{v}\}\right)$



lineair onafhankelijk
$\vec{w} \notin \mathrm{Span}\left(\{\vec{u}, \vec{v}\}\right)$

Geef een $\vec{w}$ zodat $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ lineair afhankelijk is: $\vec{w} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix}$

Vb. 2.17 Is de verzameling S lineair onafhankelijk?

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Oplossing: Kijk of dit stelsel oplosbaar is

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{0}}$$

Reduceer de uitgebreide matrix.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Reduceer de uitgebreide matrix.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Schrijf de oplossingsverzameling uit.

Reduceer de uitgebreide matrix.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Schrijf de oplossingsverzameling uit.

Geef een niet-triviale lineaire combinatie van de vectoren in S die gelijk is aan $\vec{0}$.

Sectie 2.6: Balanceren van chemische vergelijkingen

Zie werkcollege


冨嶽三十六景
神奈川沖浪裏