

Lineaire Algebra

1ste Bachelor
Industrieel Ingenieur



Editie

Versie 2023-2024

7 februari 2024.

Uitgever

Willem Waegeman, An Schelfaut, Elien Van de Walle, Demir Ali Köse en Joris Mattheijssens

Vakgroep Data Analyse en Wiskundige Modelling

Universiteit Gent

Coupure links 653

9000 Gent

België

© 2018 door Willem Waegeman.

Dit boek is een adaptatie van het werk van Robert A. Beezer. Toestemming tot kopiëren, verspreiden en/of aanpassen van dit document werd gegeven onder de voorwaarden van de GNU Free Documentation License, Versie 1.2 of eender welke latere versies gepubliceerd door de Free Software Foundation.

Inhoudsopgave

Inhoudsopgave	5
Hoofdstuk 1 Stelsels van Lineaire Vergelijkingen	1
1.1 Wat is Lineaire Algebra?	1
1.2 Oplossen van Stelsels van Lineaire Vergelijkingen	2
1.2.1 Mogelijkheden voor Oplossingsverzamelingen	3
1.2.2 Equivalente stelsels en bewerkingen op vergelijkingen	5
1.3 Rij-Gereduceerde Echelonvorm	8
1.3.1 De Uitgebreide Matrix	8
1.3.2 Rijbewerkingen	11
1.3.3 Rij-Gereduceerde Echelonvorm	13
1.3.4 Echelonvorm	19
1.3.5 Oplosbare Stelsels	20
1.4 Netwerken Analyseren	23
1.4.1 Nodige Concepten uit de Fysica	24
1.4.2 Vertakkingen en Kringstromen	27
1.4.3 Berekening van Vertakkingsstromen in Elektrische Netwerken	28
1.4.4 Berekening van Kringstromen in Elektrische Netwerken	30
1.5 Voorbereiding Werkcollege	32
1.6 Oefeningen	33
Hoofdstuk 2 Vector- en Matrixvoorstelling voor Lineaire Stelsels	38
2.1 Vectorbewerkingen en Vectorvoorstellingen	38
2.1.1 Eigenschappen van Vectoren	41
2.1.2 Lineaire Combinaties	43
2.1.3 Parametrische Vectorvorm voor Oplossingsverzamelingen	46
2.2 Span van een verzameling	48
2.3 Matrixvoorstellingen voor Lineaire Stelsels	55
2.4 Homogene Stelsels Vergelijkingen	58
2.5 Lineaire Afhankelijkheid	61
2.6 Chemische Vergelijkingen Balanceren	63
2.7 Voorbereiding Werkcollege	65
2.8 Oefeningen	65

Hoofdstuk 1

Stelsels van Lineaire Vergelijkingen

Als men over lineaire algebra spreekt, dan denken velen spontaan aan het oplossen van stelsels van lineaire vergelijkingen. In het eerste hoofdstuk besteden we dan ook uitgebreid aandacht aan dit topic. De technieken die we bespreken zullen vaak gebruikt worden in latere hoofdstukken, dus lees dit hoofdstuk aandachtig en zorg ervoor dat je alle concepten goed begrijpt.

Sectie 1.1 Wat is Lineaire Algebra?

De inhoud van het vak lineaire algebra kan verklaard worden door de twee begrippen apart te ontleden: “lineair” is een term die je tegen het einde van de cursus beter zal appreciëren. In zekere zin is die appreciatie één van de hoofddoelen van deze cursus. Voor nu volstaat het om “lineair” te zien als een manier om te zeggen dat iets “recht” is, of “plat”. Neem bijvoorbeeld het xy -vlak. Je bent waarschijnlijk gewoon om een rechte te beschrijven als een verzameling oplossingen voor een vergelijking van de vorm $y = mx + b$, met m de helling en b de verschuiving in de y -richting, twee constanten die de rechte bepalen. In multivariate calculus beschouwen we ook vlakken. In een driedimensionale ruimte, waar coördinaten beschreven worden door een trio (x, y, z) , kan een vlak gezien worden als een verzameling van oplossingen voor vergelijkingen van de vorm $ax + by + cz = d$, met a, b, c en d constanten die het vlak bepalen. In drie dimensies zien we een vlak als “plat”, en rechten als “recht”. In multivariate calculus heb je gezien hoe een rechte een verzameling van punten is die voldoet aan vergelijkingen zoals $x = 3t - 4$, $y = -7t + 2$, $z = 9t$, waar t een parameter is die eender welke waarde kan aannemen.

Een andere manier om dit begrip van “vlakheid” te beschouwen is door op te merken dat de verzamelingen punten die we hierboven hebben beschreven oplossingen zijn van vergelijkingen van een relatief gemakkelijke vorm. In deze vergelijkingen komen enkel optelling en vermenigvuldiging aan bod. Soms zal er een aftrekking of een deling aan bod komen, maar doorgaans zullen de eerste twee bewerkingen volstaan. Hieronder geven we enkele voorbeelden van typische vergelijkingen die aan bod zullen komen in de volgende secties:

$$2x + 3y - 4z = 13 \qquad 4x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \qquad 9a - 2b + 7c + 2d = -7$$

Wat we niet zullen behandelen zijn vergelijkingen zoals

$$xy + 5yz = 13 \qquad x_1 + x_2^3/x_4 - x_3x_4x_5^2 = 0 \qquad \tan(ab) + \log(c - d) = -7.$$

De enige uitzondering is dat we occasioneel een vierkantswortel nodig zullen hebben.

De korte beschouwing van hierboven over rechten en vlakken leert ons dat lineaire algebra inherent zeer meetkundig is opgebouwd. Voorbeelden in twee of drie dimensies zijn zeer nuttige manieren om inzicht te verwerven in de belangrijke concepten die aan bod zullen komen in deze cursus. De sterkte

van lineaire algebra ligt echter in de mogelijkheid te blijven werken met “rechte” of “platte” objecten in meer dan drie dimensies, zonder dat we ons erg druk moeten maken over het visualiseren van dergelijke situaties. Alhoewel onze intuïtie erg gebaseerd is op voorbeelden in twee of drie dimensies, houden we toch vast aan een zuiver algebraïsche benadering van het onderwerp, waar de meetkunde op de achtergrond staat. Anderen kiezen ervoor om deze prioriteiten om te draaien, wat eveneens tot een zeer nuttige cursus leidt, maar voor deze cursus wordt de voorkeur gegeven aan de algebraïsche aanpak.

Sectie 1.2 Oplossen van Stelsels van Lineaire Vergelijkingen

Doorheen de tekst zullen we de gewoonte aannemen om wiskundige concepten formeel te introduceren in de vorm van definities en stellingen. We vliegen er direct in met een eerste definitie.

Definitie 1.1 Stelsel van Lineaire Vergelijkingen

Een **stelsel met m lineaire vergelijkingen** is een verzameling van m vergelijkingen in de variabelen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ van de vorm

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

waarbij a_{ij} , b_i en x_j waarden kunnen aannemen uit de verzameling van de reële getallen \mathbb{R} .

Definitie 1.2 Oplossing van een Stelsel van Lineaire Vergelijkingen

Een **oplossing** van een stelsel van lineaire vergelijkingen van n variabelen, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ (zoals het stelsel gegeven in [Definitie 1.1](#)), is een geordende lijst van n reële getallen, $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ zodat, wanneer we x_1 door s_1 substitueren, x_2 door s_2 , x_3 door s_3 , \dots , x_n door s_n , het linkerlid gelijk is aan het rechterlid voor elke vergelijking van het stelsel. Met andere woorden, na substitutie is elke vergelijking tegelijkertijd geldig.

De gebruikelijke manier om een oplossing neer te schrijven is in de vorm $x_1 = 12, x_2 = -7, x_3 = 2$, wat betekent dat $s_1 = 12, s_2 = -7, s_3 = 2$ volgens de notatie van [Definitie 1.2](#). Om *alle* mogelijke oplossingen van een stelsel van lineaire vergelijkingen te beschouwen, definiëren we nu de verzameling van alle oplossingen.

Definitie 1.3 Oplossingsverzameling van een Stelsel van Lineaire Vergelijkingen

De **oplossingsverzameling** van een lineair stelsel vergelijkingen is de verzameling die elke oplossing van het stelsel bevat, en niets meer.

Merk op dat een oplossingsverzameling oneindig groot kan zijn, of dat er geen oplossingen voor het stelsel kunnen zijn. In dit laatste geval schrijven we de oplossingsverzameling als de ledige verzameling $\emptyset = \{\}$. Hieronder geven we een voorbeeld van de notaties geïntroduceerd in [Definitie 1.1](#) en de notie van een oplossing ([Definitie 1.2](#)).

Voorbeeld 1.1

Gegeven is het stelsel van lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_4 &= 7, \\x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 3, \\3x_1 + x_2 + 5x_3 - 7x_4 &= 1.\end{aligned}$$

We hebben $n = 4$ variabelen en $m = 3$ vergelijkingen. Daarnaast hebben we

$$\begin{array}{ccccc}a_{11} = 1 & a_{12} = 2 & a_{13} = 0 & a_{14} = 1 & b_1 = 7 \\a_{21} = 1 & a_{22} = 1 & a_{23} = 1 & a_{24} = -1 & b_2 = 3 \\a_{31} = 3 & a_{32} = 1 & a_{33} = 5 & a_{34} = -7 & b_3 = 1.\end{array}$$

Controleer dat $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$ een oplossing is ([Definitie 1.2](#)), maar niet de enige oplossing! Zo is $x_1 = -12$, $x_2 = 11$, $x_3 = 1$, $x_4 = -3$ bijvoorbeeld ook een oplossing, naast nog andere mogelijkheden. De oplossingsverzameling bevat daarom al minstens twee elementen. \square

Mogelijkheden voor Oplossingsverzamelingen

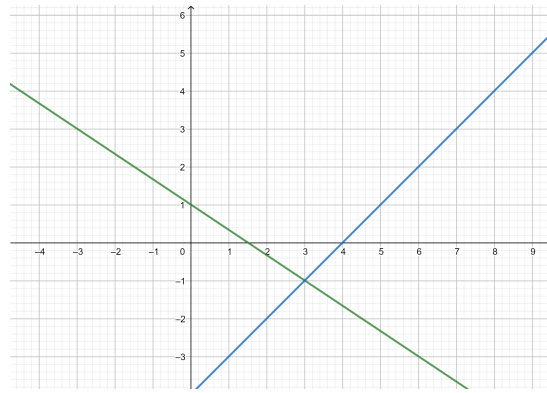
Het volgende voorbeeld illustreert verschillende mogelijkheden voor de oplossingsverzameling van een stelsel van lineaire vergelijkingen. Een formele studie laten we hier achterwege, en de bijhorende stukken theorie zullen volgen in de hierop volgende secties.

Voorbeeld 1.2

Beschouw het stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee variabelen

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 &= 3, \\x_1 - x_2 &= 4.\end{aligned}$$

Wanneer we de oplossingen van elk van deze vergelijkingen afzonderlijk tekenen in het x_1x_2 -vlak komen we twee rechten, één met een negatieve helling en één met een positieve helling. Deze hebben exact één punt gemeenschappelijk: $(x_1, x_2) = (3, -1)$, hetgeen de oplossing $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ is. Vanuit de meetkunde kunnen we aannemen dat dit de enige oplossing is die voldoet aan beide vergelijkingen, en dus de enige oplossing is van het stelsel. We zeggen dat deze oplossing de unieke oplossing is van het stelsel.

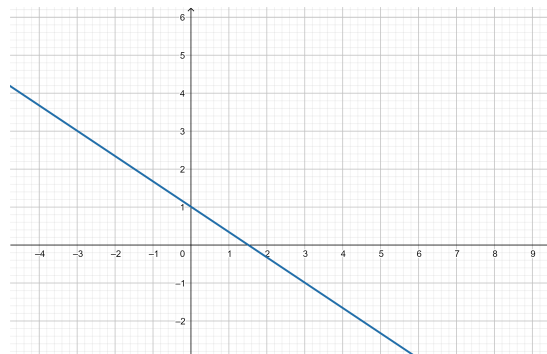


We passen nu het stelsel aan d.m.v. een andere tweede vergelijking

$$2x_1 + 3x_2 = 3,$$

$$4x_1 + 6x_2 = 6.$$

Een grafiek van de afzonderlijke oplossingen van deze vergelijkingen resulteert in twee rechten die volledig overlappen. Er zijn oneindig veel koppels van punten die voldoen aan beide vergelijkingen. We zullen later zien hoe we deze oneindige oplossingsverzameling exact kunnen beschrijven (zie [Voorbeeld 1.13](#)). Merk dat de tweede vergelijking een veelvoud is van de eerste vergelijking.

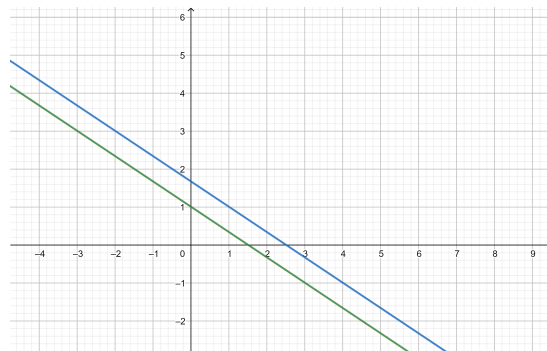


Een kleine aanpassing zorgt voor een derde lineair stelsel

$$2x_1 + 3x_2 = 3,$$

$$4x_1 + 6x_2 = 10.$$

Ditmaal toont de grafiek twee parallelle rechten, nl. met gelijke helling. Er zijn geen gemeenschappelijke punten en zodoende is de oplossingsverzameling van dit derde stelsel de ledige verzameling, $S = \emptyset$.



Equivalentste stelsels en bewerkingen op vergelijkingen

Na deze uitvoerige bespreking over oplossingsverzamelingen voor lineaire stelsels ben je klaar om ze zelf te gaan bepalen. Een essentiële stap in de zoektocht naar oplossingsverzamelingen is het transformeren van het originele stelsel naar een zogenaamd equivalent stelsel.

Definitie 1.4 Equivalent Stelsel

Twee stelsels van lineaire vergelijkingen zijn **equivalent** als hun oplossingsverzamelingen identiek zijn.

Met deze definitie kunnen we beginnen met het beschrijven van onze strategie voor het oplossen van lineaire stelsels. Wanneer we een lineair stelsel beschouwen dat moeilijk op te lossen lijkt, zouden we dit stelsel graag transformeren naar een *equivalent* stelsel dat zich wel gemakkelijk laat oplossen. Aangezien hun oplossingsverzamelingen gelijk zijn, kunnen we het “gemakkelijke” stelsel oplossen en we bekomen tegelijkertijd de oplossingsverzameling voor het “moeilijke” stelsel. We behandelen nu de methoden om dit uit te bouwen tot een werkbare strategie.

Stelling 1.1 Bewerkingen op vergelijkingen die oplossingsverzamelingen behouden

Wanneer we één van volgende drie bewerkingen toepassen op een stelsel van lineaire vergelijkingen, dan zijn het originele en het getransformeerde stelsel equivalent.

1. Verwissel twee vergelijkingen van plaats in de oplisting van de vergelijkingen.
2. Vermenigvuldig elke term van een vergelijking met een niet-nul element α .
3. Vermenigvuldig elke term van een vergelijking met een niet-nul element α en tel deze vergelijking termsgewijs op bij een tweede vergelijking. Behoud de eerste vergelijking en vervang de tweede vergelijking door de nieuw bekomen vergelijking.

Bewijs Het formele bewijs voor deze stelling is ietwat technisch, maar de beste manier om inzicht te verwerven in deze stelling is door een uitgewerkt voorbeeld. ■

Voorbeeld 1.3

We lossen het volgende stelsel op d.m.v. een opeenvolging van bewerkingen op de vergelijkingen.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 5, \\2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 6.\end{aligned}$$

$\alpha = -1$ maal Vergelijking 1, opgeteld bij Vergelijking 2:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\0x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 1, \\2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 6.\end{aligned}$$

$\alpha = -2$ maal Vergelijking 1, opgeteld bij Vergelijking 3:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\0x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 1, \\0x_1 + 2x_2 + 1x_3 &= -2.\end{aligned}$$

$\alpha = -2$ maal Vergelijking 2, opgeteld bij Vergelijking 3:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\0x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 1, \\0x_1 + 0x_2 - 1x_3 &= -4.\end{aligned}$$

$\alpha = -1$ maal Vergelijking 3:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\0x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 1, \\0x_1 + 0x_2 + 1x_3 &= 4.\end{aligned}$$

Wat herschreven kan worden tot

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\x_2 + x_3 &= 1, \\x_3 &= 4.\end{aligned}$$

Dit eindresultaat is een zeer eenvoudig op te lossen stelsel vergelijkingen. De derde vergelijking vereist dat $x_3 = 4$ geldt. We substitueren deze laatste in Vergelijking 2 en bekomen zo $x_2 = -3$. Tot slot voeren we de substitutie van x_2 en x_3 door in de eerste vergelijking en vinden we dat $x_1 = 2$. Bemerkt dat dit eveneens de enige mogelijke oplossing is van het stelsel, aangezien we in elke stap geen andere mogelijke keuze hadden voor de verschillende variabelen. Omdat we op elk van de stelsels telkens een bewerking op vergelijkingen hebben toegepast, geldt er dat alle stelsels equivalent zijn met elkaar door [Stelling 1.1](#). Bijgevolg is $(x_1, x_2, x_3) = (2, -3, 4)$ de unieke oplossing van het *originele* stelsel vergelijkingen (alsook voor de andere stelsels die als tussenstap dienden). We noteren $S = \{(2, -3, 4)\}$ als eindresultaat. \boxtimes

Voorbeeld 1.4

Het volgende stelsel vergelijkingen hebben we reeds eerder behandeld in [Voorbeeld 1.1](#), waar we al *één* oplossing hebben gevonden. Nu gaan we op zoek naar alle mogelijke oplossingen van dit stelsel. De volgorde van de uitgevoerde bewerkingen op vergelijkingen die we hier hanteren is even van minder belang, zolang je inziet dat elke stap afzonderlijk correct is.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 &= 7, \\x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 3, \\3x_1 + x_2 + 5x_3 - 7x_4 &= 1\end{aligned}$$

$\alpha = -1$ maal Vergelijking 1, opgeteld bij Vergelijking 2:

$$x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 = 7,$$

$$\begin{aligned}0x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= -4, \\3x_1 + x_2 + 5x_3 - 7x_4 &= 1.\end{aligned}$$

$\alpha = -3$ maal Vergelijking 1, opgeteld bij Vergelijking 3:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 &= 7, \\0x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= -4, \\0x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 10x_4 &= -20.\end{aligned}$$

$\alpha = -5$ maal Vergelijking 2, opgeteld bij Vergelijking 3:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 &= 7, \\0x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= -4, \\0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0.\end{aligned}$$

$\alpha = -1$ maal Vergelijking 2:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 &= 7, \\0x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4, \\0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0.\end{aligned}$$

$\alpha = -2$ maal Vergelijking 2, opgeteld bij Vergelijking 1:

$$\begin{aligned}x_1 + 0x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -1, \\0x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4, \\0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0,\end{aligned}$$

hetgeen herschreven kan worden tot

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_3 - 3x_4 &= -1, \\x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4, \\0 &= 0.\end{aligned}$$

Wat vertelt de vergelijking $0 = 0$ ons? We kunnen *alle* mogelijke waarden voor x_1, x_2, x_3, x_4 kiezen en er zal altijd aan de vergelijking voldaan zijn. We hoeven daarom geen rekening te houden met deze laatste vergelijking en kijken enkel naar de eerste twee. We kunnen de tweede vergelijking behandelen zonder rekening te moeten houden met variabele x_1 . Er lijkt vrij veel keuzevrijheid te zijn wat betreft de waarden voor x_2, x_3, x_4 die voldoen aan deze vergelijking. Neem willekeurig twee waarden voor x_3 en x_4 , bijvoorbeeld $x_3 = a$ en $x_4 = b$. We kunnen nu deze gekozen waarden voor x_3 en x_4 vervangen in Vergelijking 1. Zo verkrijgen we

$$\begin{aligned}x_1 + 2a - 3b &= -1 \\ \Leftrightarrow x_1 &= -1 - 2a + 3b.\end{aligned}$$

Op gelijkaardige manier bekomen we voor Vergelijking 2

$$x_2 - a + 2b = 4$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 4 + a - 2b.$$

De willekeurige keuze voor x_3 en x_4 heeft geleid tot specifieke waarden voor x_1 en x_2 . De enkele oplossing gegeven in [Voorbeeld 1.1](#) werd bekomen door keuzes $a = 2$ en $b = 1$. We kunnen nu eenvoudig en relatief snel veel meer oplossingen vinden, zelfs oneindig veel. Veronderstel dat we $a = 5$ en $b = -2$ kiezen. Dan bekomen we

$$\begin{aligned}x_1 &= -1 - 2(5) + 3(-2) = -17 \\x_2 &= 4 + 5 - 2(-2) = 13.\end{aligned}$$

En we kunnen verifiëren dat $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-17, 13, 5, -2)$ voldoet aan alle drie de vergelijkingen. De volledige oplossingsverzameling wordt nu geschreven als

$$S = \{(-1 - 2a + 3b, 4 + a - 2b, a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

Tot slot is het een nuttige oefening om het resultaat van dit voorbeeld te controleren. Neem de algemene vorm van een oplossing, zoals beschreven in de oplossingsverzameling, substitueer deze in de drie vergelijkingen en verifieer dat aan deze in alle gevallen voldaan is. \square

Sectie 1.3 Rij-Gereduceerde Echelonvorm

Na het oplossen van enkele stelsels van vergelijkingen zul je merken dat het weinig uitmaakt *hoe* we onze variabelen noteren, in tegenstelling tot de getallen die de coëfficiënten vormen. Een stelsel met variabelen x_1, x_2, x_3 zal hetzelfde gedrag vertonen als een stelsel met variabelen a, b, c zolang alle constanten onveranderd en op dezelfde plaats blijven. In deze sectie identificeren we de cruciale stukjes informatie over een stelsel vergelijkingen in wat we een matrix zullen noemen, en we gebruiken deze matrix om de vergelijkingen systematisch op te lossen.

De Uitgebreide Matrix

Een **matrix** is een rechthoekige structuur van getallen in \mathbb{R} van m rijen en n kolommen.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

We zullen de hoofdletters uit het gebruikelijke Latijnse alfabet (A, B, C, \dots) gebruiken om matrices aan te duiden en rechte haakjes om de structuur neer te schrijven. Dikwijls worden ook grote ronde haakjes gebruikt voor deze laatste. Het verschil in notatie is echter niet belangrijk. De rijen van een matrix worden geteld van boven naar onder (rij 1 bevindt zich bovenaan de matrix) en de kolommen worden geteld van links naar rechts (kolom 1 is de uiterst linkse kolom). Voor een matrix A verwijzen de notaties

$$[A]_{ij}$$

en a_{ij} allebei naar het reële getal dat staat op de i -de rij en de j -de kolom. Bemerkt dat de kleine letters gebruikt worden voor de elementen van een matrix, terwijl de hoofdletters verwijzen naar de matrix zelf.

Voorbeeld 1.5

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

is een matrix met $m = 3$ rijen en $n = 4$ kolommen. We kunnen uitdrukken dat $[B]_{23} = -6$ terwijl $[B]_{34} = -2$. \boxtimes

Een **kolomvector** van **grootte** m is een geordende lijst van m getallen die in vaste volgorde en verticaal geschreven worden, van boven naar beneden. We zullen ook naar een kolomvector refereren als simpelweg een vector. Kolomvectoren worden vetgedrukt en met een pijl erboven geschreven, doorgaans met een kleine Latijnse letter uit het einde van het alfabet, zoals \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} . Om te verwijzen naar het i -de **element** of **component** uit de lijst die overeenstemt met de vector \vec{v} schrijven we $[\vec{v}]_i$ of v_i . Een vector van grootte m kan geschreven worden als

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

De **nulvector** van grootte m is de kolomvector van grootte m waarbij elk element het getal nul is.

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Voor een stelsel van lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

is de **coëfficiëntenmatrix** de $m \times n$ matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

en de **constantenvector** is de kolomvector \vec{b} van grootte m :

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Als A de coëfficiëntenmatrix is van een stelsel van lineaire vergelijkingen en \vec{b} is de constantenvector, dan schrijven we $A\vec{x} = \vec{b}$ als verkorte notatie voor het stelsel van lineaire vergelijkingen. We verwijzen naar deze notatie als de **matrixvoorstelling** van het lineair stelsel. We kunnen het stelsel eigenlijk beschouwen als een vermenigvuldiging van matrix A en vector \vec{x} met als uitkomst \vec{b} . We stellen een meer formele beschouwing van deze matrix-vectorvermenigvuldiging uit tot [Definitie 2.7](#).

Voorbeeld 1.6

Het stelsel van lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 + x_5 &= 9, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 - 3x_5 &= 0, \\ -2x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= -3, \end{aligned}$$

heeft coëfficiëntenmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 7 & -5 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

en constantenvector

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix},$$

en wordt daarom neergeschreven als $A\vec{x} = \vec{b}$. ☒

Beschouw een stelsel met m vergelijkingen in n variabelen, met coëfficiëntenmatrix A en constantenvector \vec{b} . Dan is de **uitgebreide matrix** van het stelsel vergelijkingen de $m \times (n + 1)$ matrix waarvan de eerste n kolommen de kolommen zijn van A en waarvan de laatste kolom (kolom $n + 1$) de kolomvector \vec{b} is. Deze matrix wordt genoteerd als $[A \quad \vec{b}]$ of kortweg A_b .

Voorbeeld 1.7

We beschouwen het volgende stelsel van 3 vergelijkingen in 3 variabelen:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 8, \\ x_1 + x_2 &= 5. \end{aligned}$$

Hierbij is de uitgebreide matrix:

$$[A \quad \vec{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

☒

Rijbewerkingen

Een uitgebreide matrix van een stelsel vergelijkingen bespaart ons de eentonigheid van het herhaaldelijk neerschrijven van de namen van de variabelen wanneer we het stelsel oplossen. Het zorgt ook dat we niet langer afhankelijk zijn van de namen van de beschouwde variabelen. We hebben enkele bewerkingen behandeld die we kunnen toepassen op vergelijkingen zonder hun oplossingen te veranderen (Stelling 1.1). De volgende twee definities en stelling hevelen de ideeën achter deze bewerkingen over van vergelijkingen naar uitgebreide matrices.

Definitie 1.5 Rijbewerkingen

De volgende drie bewerkingen zetten een $m \times n$ matrix om in een andere matrix van dezelfde grootte en worden ook wel **rijbewerkingen** genoemd.

1. Verwissel twee rijen van plaats.
2. Vermenigvuldig elk element op een enkele rij met een getal niet gelijk aan nul.
3. Vermenigvuldig elk element op een rij met een getal en tel elk van deze waarden op bij de elementen van een tweede rij in dezelfde kolom. Laat de eerst beschouwde rij onveranderd, maar vervang de tweede rij door de nieuwe waarden.

We zullen een symbolische notatie gebruiken die deze rijbewerkingen beschrijft:

1. $R_i \leftrightarrow R_j$: Verwissel rij i en j van plaats.
2. αR_i : Vermenigvuldig rij i met de niet-nul scalar α .
3. $R_j + \alpha R_i$: Vermenigvuldig rij i met scalar α en tel op bij rij j .

Definitie 1.6 Rij-Equivalente Matrices

Twee matrices A en B zijn **rij-equivalent** als de ene bekomen kan worden uit de andere d.m.v. een reeks rijbewerkingen.

Voorbeeld 1.8

De matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & -9 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

zijn rij-equivalent, zoals blijkt uit

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 5 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & -9 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

We kunnen eveneens stellen dat elk paar van de bovenstaande drie matrices rij-equivalent is. \square

Merk op dat elk van deze rijbewerkingen omkeerbaar is, waardoor we niet hoeven te letten op een onderscheid tussen “ A is rij-equivalent met B ” en “ B is rij-equivalent met A ”. De voorgaande definities werden ingevoerd om de volgende stelling te kunnen formuleren. Deze toont aan dat rij-equivalente matrices overeenstemmen met stelsels van lineaire vergelijkingen die identieke oplossingsverzamelingen hebben.

Stelling 1.2 Rij-equivalente Matrices corresponderen met Equivalente Stelsels

Veronderstel dat A en B rij-equivalente uitgebreide matrices zijn. Dan zijn de stelsels van lineaire vergelijkingen die ze voorstellen equivalent.

Bewijs Wanneer we een enkele rijbewerking uitvoeren op een uitgebreide matrix, dan heeft dit hetzelfde effect als wanneer we de bewerking op de corresponderende vergelijkingen zouden uitvoeren. Door [Stelling 1.1](#) toe te passen zien we dat elk van de rijbewerkingen de oplossingsverzameling van het bijhorende stelsel vergelijkingen zal behouden. \blacksquare

Momenteel bestaat ons plan van aanpak uit het starten vanuit een stelsel vergelijkingen, voorgesteld door een uitgebreide matrix, waarop we rijbewerkingen toepassen (die de oplossing van het stelsel onveranderd laten) om een meer “eenvoudige” uitgebreide matrix te bekomen, die we op zijn beurt kunnen omzetten naar een “eenvoudig” stelsel vergelijkingen, om zo het stelsel op te lossen, wetende dat dit dezelfde oplossingen zijn als voor het originele stelsel. We herhalen hier [Voorbeeld 1.3](#), ditmaal als een oefening op het gebruik van onze nieuwe methode.

Voorbeeld 1.9

We lossen het volgende stelsel op door gebruik te maken van uitgebreide matrices en rijbewerkingen. Dit is hetzelfde stelsel dat we in [Voorbeeld 1.3](#) reeds opgelost hebben via bewerkingen op vergelijkingen.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 5, \\2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 6.\end{aligned}$$

Stel de uitgebreide matrix op

$$[A \ \vec{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

en pas nu rijbewerkingen toe

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

zodat de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

rij-equivalent is met A . Door [Stelling 1.2](#) heeft het onderstaande stelsel vergelijkingen dezelfde oplossingsverzameling als het originele stelsel vergelijkingen.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\x_2 + x_3 &= 1, \\x_3 &= 4.\end{aligned}$$

Het oplossen van dit stelsel is eenvoudig en identiek aan het proces gezien in [Voorbeeld 1.3](#). ☒

Rij-Gereduceerde Echelonvorm

Het vorige voorbeeld illustreert zeer goed de definities en stellingen die we tot nu toe hebben behandeld. Er blijven echter nog twee vragen onbeantwoord. Wat wordt er precies bedoeld met een meer “eenvoudige” vorm voor een matrix, en hoe bekomen we die? Hieronder geven we het antwoord op de eerste vraag, nl. de definitie van de rij-gereduceerde echelonvorm.

Definitie 1.7 Rij-Gereduceerde Echelonvorm

Een matrix is in **rij-gereduceerde echelonvorm** wanneer ze aan de volgende voorwaarden voldoet:

1. Indien er een rij is waar elk element een nul is, dan ligt deze rij lager dan elke andere rij die een niet-nul element bevat.
2. Het meest linkse niet-nul element van een rij is gelijk aan 1.
3. Het meest linkse niet-nul element van een rij is het enige niet-nul element in zijn kolom.
4. Beschouw twee verschillende meest linkse niet-nul elementen, de ene op rij i en kolom j en de andere op rij s en kolom t . Indien $s > i$, dan $t > j$.

Een rij van enkel nulelementen wordt een **nulrij** genoemd en het meest linkse niet-nul element van een niet-nulrij wordt de **leidende 1** genoemd. Het aantal niet-nulrijen wordt aangeduid met r . Een kolom die een leidende 1 bevat wordt een **pivotkolom** genoemd. De verzameling van kolomindices voor alle pivotkolommen wordt genoteerd als $D = \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_r\}$ waarbij $d_1 < d_2 < d_3 < \dots < d_r$, terwijl de kolommen die geen pivotkolommen zijn genoteerd worden als $F = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_{n-r}\}$ waarbij $f_1 < f_2 < f_3 < \dots < f_{n-r}$.

Het voornaamste kenmerk van de rij-gereduceerde echelonvorm is het patroon van leidende 1'en dat gegarandeerd wordt door voorwaarden (2) en (4), wat doet denken aan een formatie vliegende ganzen, een trap of een waterstroom die stapsgewijs naar beneden kabbelt.

Er werden een aantal nieuwe termen en notaties geïntroduceerd in deze definitie, wat je al kan doen vermoeden dat dit een belangrijke definitie is. Bemerkt dat al de nieuwe begrippen betrekking hebben op een matrix. Soms zullen we deze gebruiken voor een uitgebreide matrix, en soms voor een coëfficiëntenmatrix. Let daarom steeds op het type matrix dat je op dat moment aan het analyseren bent.

Voorbeeld 1.10

De matrix C is in rij-gereduceerde echelonvorm.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 6 & 0 & 0 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deze matrix heeft twee nulrijen en drie leidende 1'en, dus geldt $r = 3$. Kolommen 1, 5 en 6 zijn de pivotkolommen, waardoor $D = \{1, 5, 6\}$ en $F = \{2, 3, 4, 7, 8\}$. \square

Voorbeeld 1.11

De matrix E is niet in rij-gereduceerde echelonvorm aangezien het elk van de vier voorwaarden van [Definitie 1.7](#) exact éénmaal schendt.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 6 & 0 & 7 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\square

Voor sommige concepten die we zullen behandelen zal het volstaan dat er enkel nullen staan onder een leidende 1 in plaats van zowel boven als onder de leidende 1. (In feite zal het reeds voldoende zijn dat het leidende element niet nul is.) In dat geval is het eveneens duidelijk welke de pivotkolommen zijn. De matrix is dan in **echelonvorm**.

Stelling 1.3 Rij-Equivalente Matrix in Echelonvorm

Stel dat A een matrix is. Dan is er een matrix B waarvoor geldt dat

1. A en B zijn rij-equivalent.
2. B is in rij-gereduceerde echelonvorm.

Bewijs Stel dat A m rijen en n kolommen heeft. We beschrijven nu het proces om A in B om te zetten via rijbewerkingen. Deze procedure staat gekend als de **Gauss–Jordan eliminatie**. Om deze procedure ten volste te kunnen begrijpen, houd je best in gedachten dat i verwijst naar een rij die wordt aangepast, j naar een kolom die wordt aangepast en r houdt bij hoeveel niet-nulrijen er op dat moment zijn. Bij deze kunnen we starten.

1. Kies $j = 0$ en $r = 0$.
2. Vermeerder j met 1. Indien j nu gelijk is aan $n + 1$, stop dan hier.
3. Bekijk de elementen van A in kolom j op rijen $r + 1$ tot en met m . Indien al deze elementen nul zijn, ga dan naar Stap 2.

4. Kies een rij uit rijen $r + 1$ tot en met m met een niet-nul element in kolom j .
Stel dat i de index is van deze rij.
5. Vermeerder r met 1.
6. Gebruik de eerste rijbewerking om rijen i en r om te wisselen.
7. Gebruik de tweede rijbewerking om het element op rij r en kolom j om te zetten in een 1.
8. Gebruik de derde rijbewerking met rij r om elk ander element in kolom j om te zetten naar een nul.
9. Ga naar Stap 2.

Het eindresultaat van deze procedure is dat de matrix A omgezet is in een matrix in rij-gereduceerde echelonvorm, de welke we B zullen noemen. We dienen nu nog te bewijzen dat dit daadwerkelijk het geval is door aan te tonen dat de geconverteerde matrix B de eigenschappen uit [Definitie 1.7](#) heeft. Dit formeel bewijs valt echter buiten het bestek van deze cursus, omwille van de techniciteit van het bewijs. Bemerkt dat de matrix enkel is aangepast door rijbewerkingen (Stap 6, Stap 7, Stap 8), waardoor A en B rij-equivalent zijn ([Definitie 1.6](#)). ■

Nu kunnen we alle resultaten samenbrengen: begin met een stelsel van lineaire vergelijkingen ([Definitie 1.1](#)) en druk het stelsel uit d.m.v. zijn uitgebreide matrix. Gebruik vervolgens rijbewerkingen ([Definitie 1.5](#)) om deze matrix om te zetten naar haar rij-gereduceerde echelonvorm ([Definitie 1.7](#)) via de Gauss-Jordan eliminatie. [Stelling 1.3](#) vertelt ons dat dit proces altijd een geldig resultaat oplevert en dat dat resultaat rij-equivalent ([Definitie 1.6](#)) is met de originele uitgebreide matrix. Omdat de matrix in rij-gereduceerde echelonvorm dezelfde oplossingsverzameling heeft, kunnen we de rij-gereduceerde versie analyseren in plaats van de originele matrix, waarbij we de nieuwe matrix bekijken als de uitgebreide matrix van een nieuw stelsel vergelijkingen. De schoonheid van uitgebreide matrices in rij-gereduceerde echelonvorm schuilt in het feit dat hun oplossingsverzameling met weinig inspanning bepaald kan worden, zoals we zullen zien in de volgende voorbeelden en in de hierop volgende sectie.

Daarnaast kan er opgemerkt worden dat Gauss-Jordan eliminatie een procedure is die zich uitstekend leent om door een computer uitgevoerd te worden. In feite werd de procedure in het bovenstaand bewijs beschreven door middel van pseudo-code, en met de nodige programmeervaardigheden zou een vertaling naar een programmeertaal voordehandliggend moeten zijn. Vandaag de dag wordt Gauss-Jordan eliminatie echter standaard aangeboden in programmeertalen zoals Python, Matlab of Julia. In de praktijk maken ingenieurs dan ook handig gebruik van die routines, want vaak zijn stelsels te groot om Gauss-Jordan eliminatie met pen en papier uit te voeren.

Doorheen de cursussen zullen we zien dat vrijwel elke interessante eigenschap van matrices onderzocht kan worden door te kijken naar een rij-equivalente matrix in rij-gereduceerde echelonvorm. Net om deze reden is het van cruciaal belang dat we weten dat de matrix B , die altijd bestaat volgens [Stelling 1.3](#), ook uniek is.

Stelling 1.4 Rij-Gereduceerde Echelonvorm is Uniek

Veronderstel dat A een $m \times n$ matrix is en dat B en C $m \times n$ matrices zijn die rij-equivalent zijn met A en die beide in rij-gereduceerde echelonvorm staan. Dan geldt dat $B = C$.

Bewijs Een formeel bewijs van deze stelling valt buiten het bestek van deze cursus. ■

We zullen nu enkele voorbeelden behandelen die gebruik maken van deze definities en stellingen om een aantal stelsels vergelijkingen op te lossen. We zullen vanaf nu de leidende 1'en van een matrix in rij-gereduceerde echelonvorm aanduiden met een vierkantje. Dit zal later zeer handig blijken en is dan ook een *zeer goede gewoonte* om aan te leren.

Voorbeeld 1.12

Laat ons de oplossingen van het volgende stelsel vergelijkingen zoeken,

$$\begin{aligned} -7x_1 - 6x_2 - 12x_3 &= -33, \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 24, \\ x_1 + 4x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Construeer eerst de uitgebreide matrix,

$$\begin{bmatrix} -7 & -6 & -12 & -33 \\ 5 & 5 & 7 & 24 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

en werk vervolgens toe naar de rij-gereduceerde echelonvorm. We beginnen met het creëren van nullen in de eerste kolom:

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 7 & 24 \\ -7 & -6 & -12 & -33 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 5R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -13 & -1 \\ -7 & -6 & -12 & -33 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{R_3 + 7R_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -13 & -1 \\ 0 & -6 & 16 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vervolgens maken we nullen in de tweede kolom:

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{-13}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & -6 & 16 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 6R_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{-13}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

En tot slot maken we nullen in de derde kolom:

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\frac{5}{2}R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{-13}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + \frac{13}{5}R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{R_1 - 4R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dit is nu de uitgebreide matrix van een zeer eenvoudig stelsel vergelijkingen, namelijk $x_1 = -3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$, hetgeen een voordehandliggende oplossing heeft. We zien overigens dat dit de *enige* oplossing is van het stelsel, waardoor we de volledige oplossingsverzameling bepaald hebben.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Vergelijk dit voorbeeld met de procedure die we gehanteerd hebben in [Voorbeeld 1.3](#). ☒

[Voorbeeld 1.7](#) en [Voorbeeld 1.12](#) staan in scherp contrast met elkaar op een heel aantal vlakken. Daarom bepalen we nu de oplossingen van [Voorbeeld 1.7](#).

Voorbeeld 1.13

Laat ons de oplossingen van het volgende stelsel vergelijkingen bepalen.

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1, \\2x_1 + x_2 + x_3 &= 8, \\x_1 + x_2 &= 5.\end{aligned}$$

We beginnen met het opstellen van de uitgebreide matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

om daarna te werken richting de rij-gereduceerde echelonvorm:

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-1R_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1+1R_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{R_3-2R_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Het stelsel vergelijkingen dat wordt voorgesteld door deze uitgebreide matrix dient ietwat anders aanpak te worden dan dat uit [Voorbeeld 1.12](#). Zo bemerken we eerst dat de laatste vergelijking $0 = 0$ is, wat *altijd* waar is. Hierdoor legt deze vergelijking geen restricties op aan de mogelijke oplossingen en kunnen we deze vergelijking negeren terwijl we de overige twee vergelijkingen analyseren. Deze twee vergelijkingen zijn

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 &= 3, \\x_2 - x_3 &= 2.\end{aligned}$$

Alhoewel dit stelsel relatief eenvoudig op te lossen is, lijkt het ook meerdere oplossingen te hebben. Kies bijvoorbeeld $x_3 = 1$ en verifieer voor jezelf dat deze samen met $x_1 = 2$ en $x_2 = 3$ een oplossing vormt. Of kies $x_3 = 0$ en dan vinden we een oplossing met $x_1 = 3$ en $x_2 = 2$. Probeer nu zelf een *willekeurige* waarde voor x_3 te kiezen en zoek naar de waarden voor x_1 en x_2 die voldoen aan respectievelijk de eerste en de tweede vergelijking. Het is door deze keuzevrijheid dat we x_3 een **vrije** of **onafhankelijke variabele** zullen noemen. Maar waarom laten we x_3 variëren en niet een andere variabele? Voor nu volstaat het om op te merken dat enkel de derde kolom van de uitgebreide matrix geen leidende 1 heeft. Door deze eigenschap kunnen we de andere twee vergelijkingen herschikken zodat we ze kunnen oplossen naar de variabele die overeenkomt met de leidende 1 in die rij.

$$x_1 = 3 - x_3$$

$$x_2 = 2 + x_3$$

Om de oplossingsverzameling neer te schrijven gaan we als volgt te werk:

$$S = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} 3 - x_3 & \\ 2 + x_3 & \\ x_3 & \end{array} \right] \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

In de volgende sectie gaan we dieper in op stelsels met oneindig veel oplossingen en hoe we hun oplossingsverzameling kunnen formuleren. \square

Voorbeeld 1.14

We zoeken de oplossingen van onderstaand stelsel vergelijkingen.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 &= 2, \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 &= 3, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Eerst noteren we de uitgebreide matrix,

$$\left[\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 7 & -7 & 2 \\ -3 & 4 & -5 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -5 & 2 \end{array} \right],$$

en transformeren deze naar rij-gereduceerde echelonvorm.

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 4 & -5 & 2 \\ -3 & 4 & -5 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & -7 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 + 3R_1} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \\ 2 & 1 & 7 & -7 & 2 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_3 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{-1R_2} \left[\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_1 - 1R_2} \left[\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 - 7R_2} \left[\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_3} \left[\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

We analyseren de vergelijkingen van het stelsel dat voorgesteld wordt door deze uitgebreide matrix. De derde vergelijking stelt $0 = 1$. Dit is onder elke omstandigheid fout. Geen enkele keuze voor onze variabelen zal ervoor zorgen dat aan deze vergelijking voldaan zal worden. Hier stopt het dan ook. Indien we niet aan de laatste vergelijking kunnen voldoen, is het onmogelijk om aan alle vergelijkingen te voldoen. Bijgevolg heeft dit stelsel geen oplossingen en is de bijhorende oplossingsverzameling de ledige verzameling $\emptyset = \{\}$.

Bemerk dat we reeds eerder tot deze conclusie hadden kunnen komen, namelijk vlak na de rijbewerking $R_3 - 7R_2$, waar we als derde vergelijking $0 = -5$ bekomen. Omdat het stelsel dat overeenkomt met deze matrix geen oplossingen heeft, hebben alle behandelde stelsels geen oplossingen. Voor dit voorbeeld hebben we er echter voor gekozen om de matrix volledig tot haar rij-gereduceerde echelonvorm te brengen, bij wijze van oefening. \square

Deze drie voorbeelden, [Voorbeeld 1.12](#), [Voorbeeld 1.13](#) en [Voorbeeld 1.14](#), illustreren de volledige waaier aan mogelijkheden voor een stelsel van lineaire vergelijkingen — één oplossing, oneindig veel oplossingen of geen oplossing. Een matrix A **rij-reduceren** betekent het toepassen van rijbewerkingen op A totdat een rij-equivalente matrix B bekomen wordt die in rij-gereduceerde echelonvorm staat. Het woord **rij-reduceren** zullen we dan ook gebruiken als werkwoord. Door [Stelling 1.3](#) weten we dat dit proces steeds het gewenste resultaat zal opleveren en door [Stelling 1.4](#) is het bekomen resultaat ook eenduidig bepaald. De analyse van A verloopt doorgaans via de analyse van B , waarbij we de voorgaande stellingen toepassen, steunend op de rij-equivalentie van de twee matrices.

Echelonvorm

In [Voorbeeld 1.9](#) reduceerden we de uitgebreide matrix tot

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Dit is niet de rij-gereduceerde echelonvorm (waarom niet?). Maar toch is deze vorm voldoende om het stelsel op te lossen. We noemen deze vorm de (niet-gereduceerde) echelonvorm. Deze is gedefinieerd zoals de rij-gereduceerde echelonvorm in [Definitie 1.7](#), maar met als relaxatie dat de elementen boven een spil mogen verschillen van 0.

De echelonvorm is voldoende voor het bepalen van

- de oplosbaarheid van een stelsel
- aantal oplossingen
- de afhankelijke en onafhankelijke variabelen
- de oplossingsverzameling

Doordenkers:

- In tegenstelling tot de rij-gereduceerde echelonvorm, is een echelonvorm niet uniek. Niet-nul elementen boven een spil kunnen naar 0 of zelfs naar een ander getal omgezet worden met rijbewerkingen.
- De rij-gereduceerde echelonvorm is een van de vele mogelijke echelonvormen. Maar niet elke echelonvorm is een rij-gereduceerde echelonvorm.

Tip: Rijbewerkingen kosten veel tijd en zijn vaak een bron van rekenfouten. Afhankelijk van de vraagstelling, is het vaak voldoende om de echelonvorm te vinden.

Oplosbare Stelsels

Nu gaan we iets voorzichtiger te werk wat betreft onze analyse van de rij-gereduceerde echelonvorm van een uitgebreide matrix van een stelsel van lineaire vergelijkingen. In het bijzonder bekijken we hoe we het geval van oneindig veel mogelijke oplossingen systematisch kunnen behandelen en zullen we bewijzen dat elk lineair stelsel ofwel nul, ofwel één, ofwel oneindig veel oplossingen heeft. Met deze kennis zullen we in staat zijn om elk stelsel via een goed gedefinieerde methode op te lossen.

Definitie 1.8 Oplosbare Stelsels

Een stelsel van lineaire vergelijkingen is **oplosbaar** of **consistent** als het minstens één oplossing heeft. Indien niet, dat wordt het stelsel **onoplosbaar** of **inconsistent** genoemd.

De eerste stap die we willen zetten is bepalen of een gegeven stelsel oplosbaar of onoplosbaar is. In geval van een oplosbaar stelsel kunnen we een verder onderscheid gaan maken tussen de verschillende types oplossingen. We doen dit door stevast te kijken naar de rij-gereduceerde echelonvorm van de matrix en maken daarbij gebruik van de waarde r en de verzamelingen kolomindices D en F zoals eerder gedefinieerd in [Definitie 1.7](#). Het getal r zal het meest belangrijke stukje informatie zijn dat we uit de rij-gereduceerde echelonvorm van een matrix zullen kunnen halen. Het slaat op het aantal niet-nulrijen, maar aangezien elke niet-nulrij een leidende 1 bevat, is r gelijk aan het aantal leidende 1'en in de matrix. Voor elke leidende 1 hebben we een pivotkolom, dus ook het aantal pivotkolommen. Voor verschillende situaties zullen verschillende betekenissen van r nuttig blijken.

Vooraleer we enkele stellingen aantonen over de mogelijkheden voor oplossingsverzamelingen van stelsels vergelijkingen, analyseren we eerst één bepaald stelsel met oneindige oplossingsverzameling, bij wijze van voorbeeld. We zullen de volgende werkwijze vaker hanteren en zullen ze later ook nog bijschaven.

Voorbeeld 1.15

We beschouwen een stelsel met $m = 4$ vergelijkingen en $n = 7$ variabelen.

$$\begin{aligned}x_1 + 4x_2 - x_4 + 7x_6 - 9x_7 &= 3, \\2x_1 + 8x_2 - x_3 + 3x_4 + 9x_5 - 13x_6 + 7x_7 &= 9, \\2x_3 - 3x_4 - 4x_5 + 12x_6 - 8x_7 &= 1, \\-x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 8x_5 - 31x_6 + 37x_7 &= 4.\end{aligned}$$

Dit stelsel heeft een 4×8 uitgebreide matrix die rij-equivalent is met de volgende matrix (verifieer dit) en die in rij-gereduceerde echelonvorm staat (het bestaan van deze matrix wordt gegarandeerd door [Stelling 1.3](#) en haar uniciteit volgt uit [Stelling 1.4](#)).

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -6 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

We vinden dat $r = 3$ en

$$D = \{d_1, d_2, d_3\} = \{1, 3, 4\} \quad F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\} = \{2, 5, 6, 7, 8\}.$$

Noteer met i één van de $r = 3$ niet-nulrijen en dan zien we dat we de vergelijking corresponderend met rij i kunnen oplossen naar variable x_{d_i} en dat we deze als lineaire functie van de variabelen $x_{f_1}, x_{f_2}, x_{f_3}, x_{f_4}$

kunnen schrijven. Bemerkt dat $f_5 = 8$ niet verwijst naar een variabele. We gebruiken hier een dubbel subscript (het schrijven van een symbool onder een ander). Dit vereist enige aandachtigheid en tijd om gewoon te worden.

$$\begin{aligned}x_{d_1} = x_1 &= 4 - 4x_2 - 2x_5 - x_6 + 3x_7 \\x_{d_2} = x_3 &= 2 - x_5 + 3x_6 - 5x_7 \\x_{d_3} = x_4 &= 1 - 2x_5 + 6x_6 - 6x_7\end{aligned}$$

Elk element van de verzameling $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\} = \{2, 5, 6, 7, 8\}$ is een index van een variabele, behalve $f_5 = 8$. We verwijzen naar $x_{f_1} = x_2$, $x_{f_2} = x_5$, $x_{f_3} = x_6$ en naar $x_{f_4} = x_7$ als **vrije** of **onafhankelijke** variabelen, omdat ze elke mogelijke combinatie van waarden mogen aannemen en steeds deel kunnen uitmaken van een oplossing. Deze oplossing kan bekomen worden door elke individuele vergelijking van het stelsel op te lossen voor de andere **afhankelijke** variabelen.

Elk element van de verzameling $D = \{d_1, d_2, d_3\} = \{1, 3, 4\}$ is de index van een variabele. We verwijzen naar de variabelen $x_{d_1} = x_1$, $x_{d_2} = x_3$ en $x_{d_3} = x_4$ als afhankelijke variabelen omdat ze *afhangen* van de *onafhankelijke* variabelen. Meer bepaald hebben we voor elke mogelijke keuze voor de onafhankelijke variabelen exact één reeks waarden voor de afhankelijke variabelen die allemaal samen een oplossing vormen voor het stelsel. Om de oplossingen uit te drukken in de vorm van een verzameling noteren we

$$S = \left\{ \left[\begin{array}{c} 4 - 4x_2 - 2x_5 - x_6 + 3x_7 \\ x_2 \\ 2 - x_5 + 3x_6 - 5x_7 \\ 1 - 2x_5 + 6x_6 - 6x_7 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \right] \middle| x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{R} \right\}.$$

⊠

We maken gebruik van de rij-gereduceerde echelonvorm van de uitgebreide matrix van een stelsel van lineaire vergelijkingen om de aard van een oplossingsverzameling te bepalen. Dit is dan ook een centrale stap in onze analyse. We kijken daarom naar nog een voorbeeld hiervan, na een korte definitie. We zullen de termen “vrij” en “onafhankelijk” overigens door elkaar gebruiken doorheen de cursus.

Definitie 1.9 Onafhankelijke en Afhankelijke Variabelen

Stel dat A_b een uitgebreide matrix is van een oplosbaar stelsel van lineaire vergelijkingen en B de rij-equivalente matrix in rij-gereduceerde echelonvorm. Stel dat j een index is van een kolom van B die een leidende 1 bevat voor een zekere rij (kolom j is dus een pivotkolom). Dan is de variabele x_j een **afhankelijke** variabele. Een variabele die niet afhankelijk is noemen we **onafhankelijk** of **vrij**.

Wanneer je deze definitie van naderbij bestudeert, vraag je je mogelijks af wat er gebeurt wanneer de $(n + 1)$ -de kolom van een stelsel met n variabelen een pivotkolom is. We zullen zien dat, volgens [Stelling 1.5](#), dit nooit kan voorkomen bij een oplosbaar stelsel.

Voorbeeld 1.16

Beschouw het stelsel van vijf vergelijkingen in vijf variabelen,

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + 11x_5 = 13,$$

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 &= 16, \\2x_1 - 2x_2 + x_4 + 10x_5 &= 21, \\2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 20x_5 &= 38, \\2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 &= 22,\end{aligned}$$

waarvan de uitgebreide matrix rij-gereduceerd kan worden tot

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Er staat een leidende 1 in kolommen 1, 3 en 4, dus is $D = \{1, 3, 4\}$. Hieruit leiden we af dat variabelen x_1 , x_3 en x_4 afhankelijke variabelen zullen zijn en dat elk van deze $r = 3$ niet-nulrijen van de rij-gereduceerde matrix een uitdrukking zal opleveren voor elk van deze variabelen. De verzameling F bevat alle overige kolomindices, $F = \{2, 5, 6\}$. $6 \in F$ verwijst naar de kolom die voortkomt uit de constantenvector, maar de overige elementen van F komen overeen met vrije variabelen, waardoor x_2 en x_5 vrije variabelen zijn. De drie vergelijkingen die onze oplossing beschrijven zijn dan

$$\begin{aligned}x_1 &= 6 + x_2 - 3x_5 \\x_3 &= 1 + 2x_5 \\x_4 &= 9 - 4x_5.\end{aligned}$$

Zorg ervoor dat je zeker begrijpt waar deze drie vergelijkingen vandaan komen en bemerk hoe de plaats van de leidende 1 de variabelen in het linkerlid van elke vergelijking bepaalt. We kunnen de oplossingsverzameling compact beschrijven via

$$S = \left\{ \left[\begin{array}{c} 6 + x_2 - 3x_5 \\ x_2 \\ 1 + 2x_5 \\ 9 - 4x_5 \\ x_5 \end{array} \right] \middle| x_2, x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bemerk hoe we de vrije keuze van x_2 en x_5 uitdrukken: $x_2, x_5 \in \mathbb{R}$. ☒

We kunnen nu de waarden van m , n , r en de afhankelijke en onafhankelijke variabelen gebruiken om oplossingsverzamelingen voor stelsels van lineaire vergelijkingen te categoriseren via een reeks stellingen. Allereerst hebben we een belangrijke stelling die het onderscheid tussen oplosbare en onoplosbare stelsels verder uitdiept.

Stelling 1.5 Oplosbaarheid van een Lineair Stelsel Herkennen

Veronderstel dat A_b een uitgebreide matrix is voor een stelsel van lineaire vergelijkingen met n variabelen. Dan is het stelsel vergelijkingen onoplosbaar als en slechts als de laatste kolom van A_b een pivotkolom is.

Bewijs Een formeel bewijs van deze stelling valt buiten het bestek van deze cursus. ■

De equivalentie in deze stelling is wat ze zo elegant maakt. Hierdoor hoeven we slechts naar één element van de matrix in rij-gereduceerde echelonvorm te kijken om te bepalen of een stelsel oplosbaar of onoplosbaar is.

Bemerk dat voor een oplosbaar stelsel geldt dat $n + 1 \in F$ voor de rij-gereduceerde uitgebreide matrix, waardoor het grootste element van F niet verwijst naar een variabele. Dan geldt dus voor een onoplosbaar stelsel dat $n + 1 \in D$. In dit laatste geval heeft het weinig zin om te bepalen welke de afhankelijke en onafhankelijke elementen zijn aangezien er geen oplossingen zijn. Blick even terug op [Definitie 1.9](#) en bekijk waarom we x_{n+1} niet als mogelijke afhankelijke variabele hebben overwogen, en waarom dit ook niet nodig was.

Door de karakterisatie in [Stelling 1.5](#) kunnen we nu de relatie tussen r en n van naderbij onderzoeken in functie van de oplosbaarheid van een stelsel vergelijkingen. Eerst behandelen we een geval waarbij we vrij snel de onoplosbaarheid van een stelsel kunnen besluiten.

Stelling 1.6 Onoplosbare Stelsels, r en n

Veronderstel dat A_b de uitgebreide matrix is van een stelsel van lineaire vergelijkingen. Stel dat B een rij-equivalente matrix in rij-gereduceerde echelonvorm is met r rijen die niet volledig nul zijn. Als $r = n + 1$, dan is het stelsel vergelijkingen onoplosbaar.

Bewijs Als $r = n + 1$, dan bevat elke kolom van B een leidende 1 en is dus een pivotkolom. In het bijzonder is het element van kolom $n + 1$ en rij $r = n + 1$ een leidende 1. Volgens [Stelling 1.5](#) is het stelsel dan onoplosbaar. ■

Als een stelsel met zekerheid oplosbaar is, kunnen we nog een onderscheid maken tussen twee mogelijkheden: een unieke oplossing of oneindig veel oplossingen. Uit het voorgaande weten we dat dit de enige overblijvende mogelijkheden zijn.

Stelling 1.7 Oplosbare stelsels, r en n

Veronderstel dat A_b de uitgebreide matrix is van een *oplosbaar* stelsel van lineaire vergelijkingen met n variabelen en dat B een rij-equivalente matrix is in rij-gereduceerde echelonvorm met r niet-nulrijen. Dan geldt $r \leq n$. Als $r = n$, dan heeft het stelsel een unieke oplossing. Als $r < n$, dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen.

Bewijs Deze stelling omvat drie implicaties die we dienen aan te tonen. Bemerk eerst dat B $n + 1$ kolommen heeft, waardoor er ten hoogste $n + 1$ pivotkolommen kunnen zijn: $r \leq n + 1$. Als $r = n + 1$, dan volgt uit [Stelling 1.6](#) dat het stelsel onoplosbaar is, wat in strijd is met onze veronderstelling. Bijgevolg geldt er dat $r \leq n$.

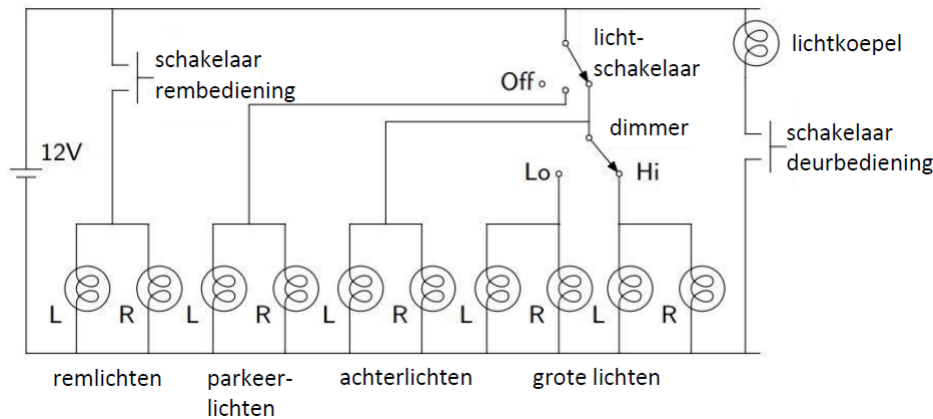
Wanneer $r = n$ geldt, dan zijn er $n - r = 0$ vrije variabelen (zo is $F = \{n + 1\}$) en zal elke oplossing exact die oplossing zijn die gegeven wordt door de eerste n elementen van kolom $n + 1$ van B .

Bij $r < n$ hebben we $n - r > 0$ vrije variabelen, overeenkomstig met de kolommen van B die geen leidende 1 hebben, met uitzondering van de laatste kolom, die nooit een leidende 1 zal bevatten wegens [Stelling 1.5](#). Door de waarden voor deze vrije variabelen te laten fluctueren, zien we duidelijk dat het stelsel oneindig veel oplossingen zal hebben. ■

Sectie 1.4 Netwerken Analyseren

Stelsels van lineaire vergelijkingen worden in veel gebieden van de wetenschap en technologie gebruikt. Zo vormen ze onder meer de basis voor de analyse van allerlei types netwerken, zoals verkeersnetwerken, sociale netwerken, elektriciteitsnetwerken, waternetwerken, ecologische netwerken en metabolische

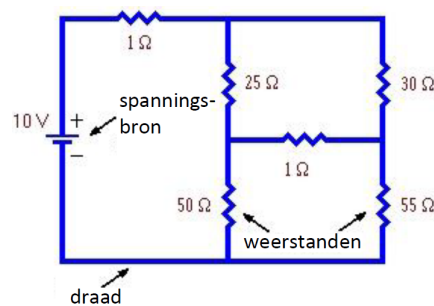
netwerken. In deze sectie illustreren we het potentieel van stelsels van lineaire vergelijkingen binnen de context van elektriciteitsnetwerken. Onderstaand diagram toont een deel van het elektriciteitsnetwerk van een auto. De batterij bevindt zich aan de linkerkant, getekend als twee gestapelde lijnsegmenten. De lijnen zijn draden, voorgesteld door lijnsegmenten met rechte hoeken voor de overzichtelijkheid. Elk licht is een cirkel die een loop omsluit.



De ontwerper van een dergelijk netwerk moet onder meer vragen kunnen beantwoorden zoals: Hoeveel elektriciteit vloeit er door de draden wanneer zowel de grote lichten (*headlights*) als de remlichten (*brake lights*) aanstaan? We zullen lineaire stelsels gebruiken om dit eenvoudig type netwerk te analyseren.

Nodige Concepten uit de Fysica

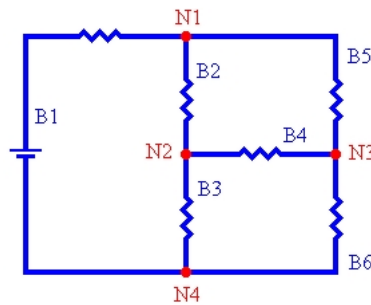
We starten met een beschrijving van enkele basisconcepten uit de fysica¹. Hieronder staat een diagram van een elektrisch circuit.



Het diagram bevat enkele symbolen zoals het symbool voor een spanningsbron (bijvoorbeeld een batterij). Spanningsbronnen genereren een kracht die zorgt voor elektrische stroom doorheen het circuit. De spanningsbron in het diagram omvat 10 volt (V). Dit betekent dat de spanning 10 volt hoger is aan het + uiteinde van de batterij, ook wel de kant van het langste lijnsegment, dan aan de kant van het – uiteinde. Bijgevolg worden elektrische ladingen in een opwaartse richting gestuwd (van de – kant naar de + kant).

In het diagram vindt men ook het symbool voor een weerstand. Weerstanden zijn apparaten die de doorstroom van elektriciteit bemoeilijken. De weerstand rechts onderaan heeft een weerstand van 55 ohm (Ω). We observeren eveneens het symbool voor een draad. Een draad wordt geacht geen weerstand te hebben. Voor de rest zullen we het diagram noteren door middel van knooppunten en vertakkingen.

¹Deze sectie is gebaseerd op <http://mathonweb.com/help/backgd2.htm#Kirchoff's%20Voltage%20Law>



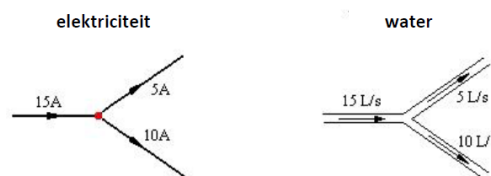
Knooppunten zijn plaatsen waar drie of meer draden samenkomen. Dit circuit bevat vier zulke knooppunten, genoteerd door N1, ..., N4. Een *vertakking* is een pad in het circuit dat aan elk uiteinde eindigt in een knooppunt en op z'n minst één spanningsbron of weerstand bevat, maar geen andere knooppunten. Dit circuit bevat 6 vertakkingen B1, ..., B6. Indien vertakking B4 geen weerstand zou bevatten, dan zou deze verwijderd kunnen worden en zouden knooppunten N2 en N3 als één enkel knooppunt beschouwd kunnen worden.

Elektrische lading die door een vertakking van een circuit stroomt is gelijkaardig aan water dat door een pijp stroomt. De snelheid waarmee een lading stroomt wordt de **stroomsterkte** genoemd. Deze wordt gemeten in coulomb/seconde of in ampère (A), gelijkaardig aan hoe waterstroming wordt gemeten in liter/seconde. Water is niet-samendrukbaar, wat betekent dat als 1 liter water aan de ene kant van de pijp eringaait, dat er ook weer 1 liter water aan de andere kant van de pijp moet uitkomen. Dezelfde situatie doet zich voor bij elektrische stromen. Als de stroomsterkte $1A$ is op een gegeven punt in een vertakking, dan is de stroomsterkte $1A$ over de gehele vertakking. Een direct gevolg hiervan zijn de **wetten van Kirchhoff**.

Stelling 1.8 Stromingswet van Kirchhoff

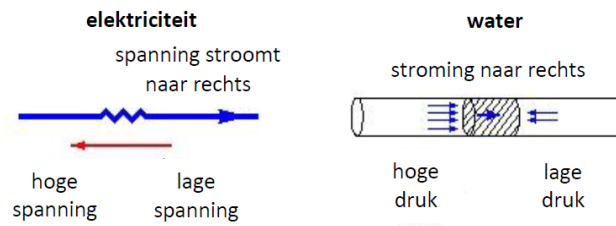
De som van de stromen die binnenkomen in een knooppunt is gelijk aan de som van de stromen die dat knooppunt verlaten.

Hieronder een voorbeeld.



Dit diagram toont ook hoe we een pijl tekenen op de vertakking om aan te geven in welke richting de stroom door de vertakking stroomt.

Elektrische stroom is een stroming van elektrische ladingen. Elektrische **spanning** is de kracht die deze stroom aanstuurt. Zoals een pomp een hoop water door een pijp stuwt door een verschil in druk te creëren aan beide uiteinden, zo stuwt een batterij ladingen doorheen een weerstand door een spanningsverschil te creëren aan beide kanten van de weerstand. Bovenstaande figuur geeft deze analogie weer.



Dit diagram laat ook zien hoe we pijlen tekenen naast een weerstand of eender welk ander apparaat om een verschil in spanning aan te duiden tussen de twee uiteinden. De kop van de pijl wijst steeds naar de kant waar de spanning het hoogst is.

We hebben gezien dat een verschil in spanning tussen twee uiteinden van een weerstand zorgt voor een stroom doorheen de weerstand. Voor vele materialen zijn spanning en stroomsterkte proportioneel. Dit wordt uitgedrukt door de **Wet van Ohm** en elk object dat hieraan voldoet wordt een weerstand genoemd.

Stelling 1.9 Wet van Ohm

Beschouw V als het verschil in spanning tussen de twee uiteinden van een weerstand (uitgedrukt in volt). I is de stroomsterkte doorheen de weerstand (gemeten in ampère) en de proportionele constante R is de weerstand (gemeten in ohm) van het weerstandsobject. Dan geldt dat

$$V = I \times R.$$

Zoals de waterdruk daalt in een tuinslang des te verder men weg beweegt van de kraan, zo verandert ook de spanning in een circuit wanneer men verder weg beweegt van de spanningsbron.

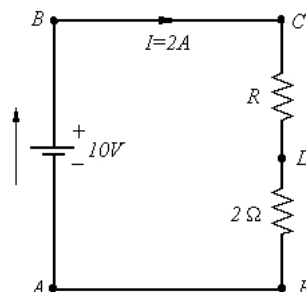
Stelling 1.10 Spanningswet van Kirchhoff

In een gesloten pad van een elektrisch circuit is de som van de dalingen in spanning doorheen de weerstanden gelijk aan de som van de stijgingen in spanning in de spanningsbronnen.

Een gesloten kring is een pad dat eindigt waar het is begonnen.

Voorbeeld 1.17

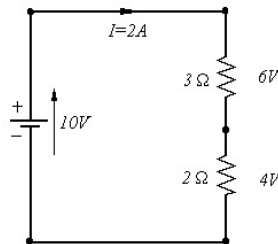
We zullen de Spanningswet van Kirchhoff en de Wet van Ohm gebruiken om de waarde te vinden van de onbekende weerstand R , gegeven dat er 2 ampère stroom door het circuit loopt.



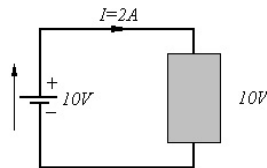
Laat ons de elektrische stroming volgen, zijnde in wijzersin, doorheen het circuit. Wanneer we starten in A en stellen dat de spanning in dat punt 0 is, dan moet de spanning 10 volt zijn in B, omdat de

batterij fungeert als een pomp die een hogere druk creëert aan de + zijde dan aan de – zijde. In C is de spanning nog altijd 10 volt, maar ze daalt wanneer we naar D gaan doordat ze door weerstand R gaat. Op weg naar E daalt ze opnieuw door de weerstand van 2 ohm. Vervolgens moet deze 0 zijn om terug uit te komen bij punt A (de spanning verandert niet doorheen een ideale draad).

Gebruikmakend van de Wet van Ohm in de vorm $V = I \times R$ vinden we dat de IR (spanning) daling doorheen de 2 weerstanden gelijk is aan $(2A) \times (2\Omega) = 4V$. Dan is, wegens de Spanningswet van Kirchhoff, de daling in de onbekende weerstand gelijk aan $10V - 4V = 6V$. Omdat $I = 2A$ volgt er uit de Wet van Ohm, $R = V/I$, dat $R = 3\Omega$. De resultaten worden nog eens samengevat in deze figuur.



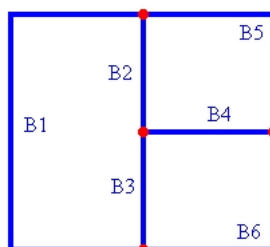
Bemerk de richtingen van de spanningspijlen doorheen elk van de apparaten. Ook het feit dat de daling in spanning doorheen de twee weerstanden proportioneel is met hun weerstanden is interessant om op te merken. Dit wordt de **Spanningsdeler Regel** genoemd. Deze regel komt van pas in vele situaties. Veronderstel dat we bovenstaand circuit vervangen door het circuit hieronder gegeven.



Stel dat we niet weten wat er in de “zwarte doos” zit, maar dat we weten dat de stroomsterkte die in de zwarte doos gaat 2A is en de spanning erdoor 10V. Dan weten we via de Wet van Ohm, $R = V/I$, dat de zwarte doos een weerstand heeft van 5Ω . Bemerk dat dit dus exact de som is van de twee weerstanden in het originele circuit. In het algemeen geldt dat twee weerstanden R_1 en R_2 , die in serie geschakeld zijn, kunnen vervangen worden door één enkele weerstand R_{eq} , waarvan de weerstand gelijk is aan de som van de twee weerstanden: $R_{eq} = R_1 + R_2$. \square

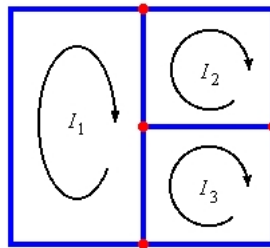
Vertakkingen en Kringstromen

In dit diagram hebben we alle weerstanden en spanningsbronnen weggelaten zodat we onze aandacht kunnen richten op de topologie van het netwerk (zijnde de structuur van het circuit) en het tellen van diens knooppunten en vertakkingen.



“Een netwerk oplossen” betekent het vinden van de stroomsterkte die door elke afzonderlijke vertakking van het netwerk stroomt. Aangezien dit circuit 6 vertakkingen heeft, moeten we dus 6 stromen berekenen.

Kringstromen bieden een meer economische insteek op het beschrijven van de stroom doorheen een netwerk. De stromen in al de 6 vertakkingen kunnen beschreven worden in termen van slechts 3 kringen, zoals aangeduid op de figuur hieronder. Een kringstroom wordt gedefinieerd als constante stroom die doorheen een gesloten kring loopt. Een gesloten kring is een pad doorheen het netwerk dat eindigt waar het start.



Elke vertakkingsstroom wordt gegeven door een algebraïsche som van alle kringstromen in die vertakking. Met algebraïsche som bedoelen we dat het teken en de richting van de kringstroom in rekening dienen genomen te worden in de optelling.

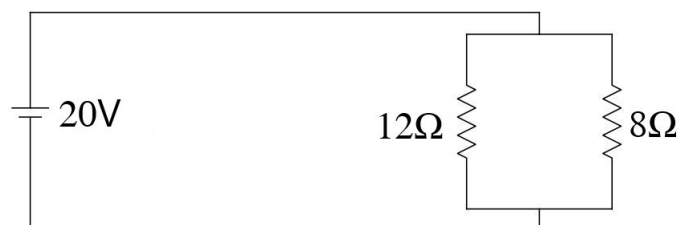
Berekening van Vertakkingsstromen in Elektrische Netwerken

Stelsels van lineaire vergelijkingen worden gebruikt om de vertakkings- en kringstromen te berekenen in elektrische netwerken. We beginnen met de berekeningen van de vertakkingsstroom, dewelke het meest eenvoudig is van de twee. Bij deze methode stellen we een stelsel vergelijkingen op waarin de onbekenden de vertakkingsstromen zijn en lossen we het stelsel op. De stappen in de methode voor de vertakkingsstromen zijn:

1. Tel het aantal nodige vertakkingsstromen. Noem dit aantal n .
2. Noem de n vertakkingsstromen i_1, i_2, \dots, i_n en teken deze op het diagram.
3. Schrijf Kirchhoff's Stromingswet neer voor elk knooppunt en Kirchhoff's Spanningswet voor elke gesloten kring. Na vereenvoudiging is het resultaat een stelsel van lineaire vergelijkingen.
4. Los het stelsel van lineaire vergelijkingen op met één van de methoden die we in dit hoofdstuk behandeld hebben.

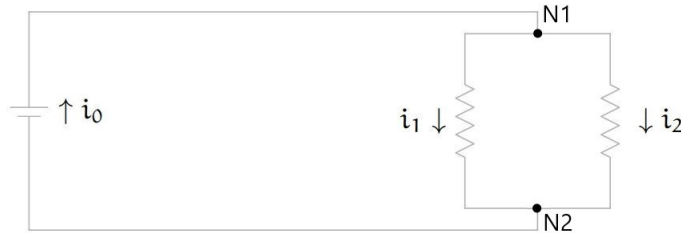
Voorbeeld 1.18

We starten met een netwerk met twee weerstanden die parallel geschakeld zijn.



Zoals we kunnen zien op de figuur zijn er 3 vertakkingen. We benoemen de vertakkingen als volgt. Noteer de stroomsterkte doorheen de linkertak van het parallelle gedeelte als i_1 en diegene door de rechtertak als i_2 . Noteer de stroomsterkte doorheen de batterij als i_0 .

Bemerk dat we de richting van de stroom niet nodig hebben, omdat we de richting kunnen omkeren zonder dat de structuur van het netwerk verandert.



We passen eerst Kirchhoff's Stromingswet toe in elk knooppunt. De splitsing rechtsboven, N1, levert op dat $i_0 = i_1 + i_2$. Toepassing op de onderste splitsing, N2, geeft $i_1 + i_2 = i_0$.

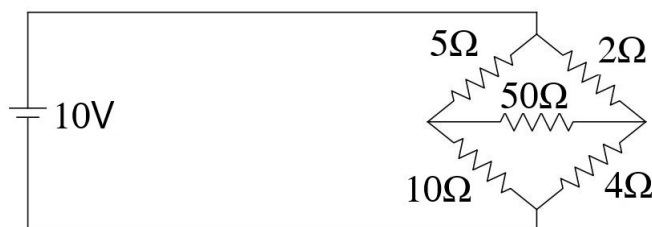
Daarna passen we Kirchhoff's Spanningswet toe op elke gesloten kring. Op het circuit dat vanuit de bovenkant van de batterij, langs de linkertak van het parallelle gedeelte, terugcirkelt naar de onderkant van de batterij is de toename in spanning 20 terwijl de daling $i_1 \cdot 12$ bedraagt, dus de spanningswet levert op dat $12i_1 = 20$. Tegelijkertijd levert dezelfde methode, maar nu door de gesloten kring doorheen de rechterkant van het parallelle gedeelte, op dat $8i_2 = 20$. Het circuit dat door het rechtergedeelte gaat en terugkeert via het linkergedeelte heeft een toename van 0 spanning en een daling van $8i_2 - 12i_1$. De doorstroomrichting is hierin minder van belang. Hieruit volgt dat $8i_2 - 12i_1 = 0$. Als eindresultaat bekomen we:

$$\begin{aligned} i_0 - i_1 - i_2 &= 0, \\ -i_0 + i_1 + i_2 &= 0, \\ 12i_1 &= 20, \\ 8i_2 &= 20, \\ -12i_1 + 8i_2 &= 0. \end{aligned}$$

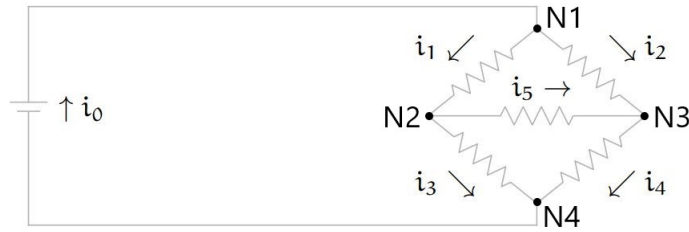
De oplossing is $i_0 = 25/6$, $i_1 = 5/3$, en $i_2 = 5/2$, telkens in ampère. (Daarnaast blijkt dus dat er in de praktijk ook overbodige vergelijkingen kunnen optreden.) \boxtimes

Voorbeeld 1.19

De Wetten van Kirchhoff stellen ons in staat om de elektrische eigenschappen van zeer complexe netwerken te bepalen. Het volgende diagram toont vijf weerstanden met waarden uitgedrukt in ohm, in een serie-parallel opstelling.



Dit staat bekend als een **Wheatstone Brug**. Om het netwerk te analyseren plaatsen we de pijlen in de volgende richtingen.



De Stromingswet van Kirchhoff, toegepast op knooppunten N1 in de top, N2 aan de linkerkant, N3 aan de rechterkant en N4 aan de onderkant, geeft volgende vergelijkingen.

$$\begin{aligned}i_0 &= i_1 + i_2, \\i_1 &= i_3 + i_5, \\i_2 + i_5 &= i_4, \\i_3 + i_4 &= i_0.\end{aligned}$$

Kirchhoff's Spanningswet toepassen op de binnenste kring (i_0 naar i_1 naar i_3 naar i_0), de buitenste kring (i_0 naar i_2 naar i_4 naar i_0) en de bovenste en onderste kringen die de batterij niet omvatten, geeft als vergelijkingen

$$\begin{aligned}5i_1 + 10i_3 &= 10, \\2i_2 + 4i_4 &= 10, \\5i_1 + 50i_5 - 2i_2 &= 0, \\50i_5 + 4i_4 - 10i_3 &= 0.\end{aligned}$$

Deze volstaan om de oplossing te bepalen: $i_0 = 7/3$, $i_1 = 2/3$, $i_2 = 5/3$, $i_3 = 2/3$, $i_4 = 5/3$, en $i_5 = 0$. \boxtimes

We kunnen vele soorten netwerken op deze manier doorgronden. Zo kunnen we bijvoorbeeld een aantal netwerken van straten analyseren².

Berekening van Kringstromen in Elektrische Netwerken

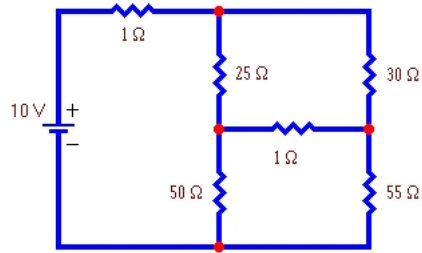
In deze methode stellen we een stelsel vergelijkingen op waarin de kringstromen de rol van onbekenden opnemen, en lossen deze op. De stromen in de verschillende vertakkingen van het circuit worden dan eenvoudig bepaald vanuit de kringstromen. De stappen in de methode voor de kringstromen zijn de volgende:

1. Tel het aantal kringstromen dat nodig is. Noem dit aantal n .
2. Kies m onafhankelijke kringstromen en noem deze I_1, I_2, \dots, I_m . Teken ze op het diagram.
3. Schrijf Kirchhoff's Stromingswet neer voor elke kring. Het eindresultaat, na simplificatie, is het stelsel van lineaire vergelijkingen.
4. Los het stelsel van lineaire vergelijkingen op via de methoden uit dit hoofdstuk.
5. Reconstrueer de vertakkingsstromen uit de kringstromen.

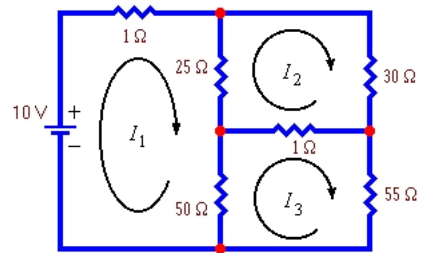
²Bekijk bijvoorbeeld <https://www.youtube.com/watch?v=8Kg21jBCm-k> voor een goed inleidend voorbeeld.

Voorbeeld 1.20

We zoeken de stroomsterkte in elk van de vertakkingen van dit circuit.



Het aantal benodigde kringstromen is 3. We zullen volgende keuze maken voor de kringstromen.



Schrijf Kirchhoff's Spanningswet uit voor elk van deze kringen. In het bijzonder zien we dat in de linkerkring de spanning van de batterij $10V$ is. Dit is dan ook de totale spanning die door de weerstanden in de linkse kring loopt. Er zitten drie weerstanden vervat in deze kring. De weerstand van 1Ω is de enige die beïnvloed wordt door I_1 . De andere twee weerstanden worden beïnvloed door twee kringstromen, in tegengestelde richting doorheen de weerstand. We dienen daarom het verschil te nemen van de kringstromen, rekening houdend met de stroomrichting. Uiteindelijk vinden we voor de linkerkring dat $1I_1 + 25(I_1 - I_2) + 50(I_1 - I_3) = 10$. Het volledige stelsel ziet er als volgt uit:

$$\begin{aligned} 1I_1 + 25(I_1 - I_2) + 50(I_1 - I_3) &= 10, \\ 25(I_2 - I_1) + 30I_2 + 1(I_2 - I_3) &= 0, \\ 50(I_3 - I_1) + 1(I_3 - I_2) + 55I_3 &= 0. \end{aligned}$$

Na groepering van de termen geeft dit

$$\begin{aligned} 76I_1 - 25I_2 - 50I_3 &= 10, \\ -25I_1 + 56I_2 - 1I_3 &= 0, \\ -50I_1 - 1I_2 + 106I_3 &= 0. \end{aligned}$$

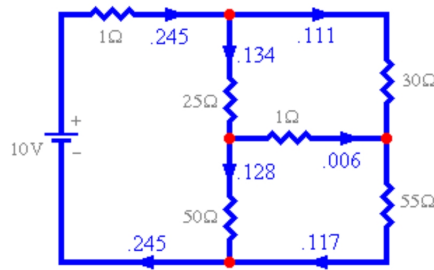
Met behulp van computersoftware lossen we het stelsel vergelijkingen op, met als resultaat de volgende oplossing voor de kringstromen (uitgedrukt in ampère):

$$I_1 = 0.245, \quad I_2 = 0.111, \quad I_3 = 0.117.$$

Om de vertakkingsstromen te verklaren, stellen we

$$\begin{aligned} i_1 &= I_1 - I_2 = 0.134, \\ i_2 &= I_1 - I_3 = 0.128, \\ i_3 &= I_3 - I_2 = 0.006. \end{aligned}$$

Reconstructie van de vertakkingsstromen uit de kringstromen geeft de resultaten in de volgende figuur.



⊗

Sectie 1.5 Voorbereiding Werkcollege

1. De uitgebreide matrix van een lineair stelsel werd via rijbewerkingen omgezet in volgende vorm.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Bepaal of het stelsel oplosbaar is.

2. Voor welke waarden van h en k is het volgende stelsel oplosbaar?

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = h, \\ -6x_1 + 3x_2 = k. \end{cases}$$

3. Zoek de algemene oplossing voor het lineair stelsel met als uitgebreide matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Bepaal de algemene oplossing voor het stelsel

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 3, \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 2. \end{cases}$$

5. Stel dat een 4×7 coëfficiëntenmatrix voor een stelsel van lineaire vergelijkingen 4 pivotkolommen heeft. Is het stelsel dan oplosbaar? Indien het stelsel oplosbaar is, hoeveel oplossingen zijn er in dat geval?

Sectie 1.6 Oefeningen

Oplossen van stelsels van lineaire vergelijkingen

1. Bepaal de oplossing van de onderstaande stelsels en geef een meetkundige interpretatie van deze oplossing.

$$\blacksquare \text{ (a) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 = 7 \\ -2x_1 - 7x_2 = -5 \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{ (c) } \begin{cases} x_1 - 5x_2 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 = 5 \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{ (b) } \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = -4 \\ -4x_1 + 8x_2 = 8 \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{ (d) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -3x_1 + 6x_2 = -3 \end{cases}$$

- \blacksquare 2. Hebben de drie rechten $x_1 - 4x_2 = 1$, $2x_1 - x_2 = -3$ en $-x_1 - 3x_2 = 4$ een gemeenschappelijk snijpunt? Bepaal dit punt indien het bestaat.

3. Bepaal de oplossing van de onderstaande stelsels en geef een meetkundige interpretatie van deze oplossing. Noteer indien mogelijk de oplossing in parametrische vectorvorm.

$$\blacksquare \text{ (a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 = -8 \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{ (f) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{ (b) } \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -3 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -2 \\ -2x_1 + x_2 + 7x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{ (g) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{ (c) } \begin{cases} 2x_1 - 6x_3 = -8 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{ (h) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 9 \\ x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{ (d) } \begin{cases} x_2 + 4x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{ (i) } \begin{cases} 8x_1 - x_2 = 4 \\ 5x_1 + 4x_2 = 1 \\ x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{ (e) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -8 \\ -4x_1 + 6x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{ (j) } \begin{cases} x_1 - 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 7 \\ x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases}$$

- \blacksquare 4. Hebben de drie vlakken $2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4$, $x_2 - 2x_3 = -2$ en $2x_1 + 3x_2 = 0$ een gemeenschappelijk snijpunt? Bepaal dit punt indien het bestaat.

5. Schrijf alle oplossingen van $A\vec{x} = \vec{0}$ in parametrische vectorvorm, waarbij A de gegeven matrix is. Geef een meetkundige interpretatie van de oplossing.

$$\blacksquare \text{ (a) } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \text{ (d) } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -9 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \text{ (b) } A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & -4 \\ 2 & -8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \text{ (e) } A = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \text{ (c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \text{ (f) } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{g} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{h} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. De onderstaande matrix is de gereduceerde echelonvorm van de uitgebreide matrix van een stelsel lineaire vergelijkingen. Noteer op basis van deze matrix de oplossing van dit stelsel in parametrische vectorvorm.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

7. Veronderstel dat elke matrix de uitgebreide matrix A_b is van een stelsel lineaire vergelijkingen, waarbij \blacksquare een getal voorstelt verschillend van 0 en $*$ een willekeurig getal. Bepaal of het stelsel consistent is. Indien dit zo is, bepaal dan of de oplossing uniek is.

$$(a) \quad A_b = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad A_b = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad A_b = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix}$$

8. Beschouw de onderstaande matrices. Bepaal de waarde(n) van h waarvoor de gegeven matrix de uitgebreide matrix is van een consistent, lineair stelsel.

$$(a) \quad \begin{bmatrix} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & h & 8 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad \begin{bmatrix} 1 & h & -3 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(d) \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & h \\ -6 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

9. Voor welke waarde(n) van de parameter(s) hebben de onderstaande stelsels geen oplossing? Wanneer is er een unieke oplossing? In welk geval zijn er oneindig veel oplossingen?

$$\textcircled{a} \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + hx_2 = k \end{cases}$$

$$\textcircled{d} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + mx_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 0 \\ mx_1 + x_2 + x_3 = m + 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{b} \quad \begin{cases} x_1 + hx_2 = 2 \\ 4x_1 + 8x_2 = k \end{cases}$$

$$\textcircled{e} \quad \begin{cases} x_1 + mx_2 + 2x_3 = m \\ 2x_1 + (2m - 1)x_2 + 4x_3 = 2(m - 1) \\ mx_1 + x_2 + mx_3 = 2 \end{cases}$$

$$\textcircled{c} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 3x_1 + hx_2 = k \end{cases}$$

10. Gegeven is een matrix A . Heeft de vergelijking $A\vec{x} = \vec{0}$ een oplossing verschillend van de nuloplossing? Heeft de vergelijking $A\vec{x} = \vec{b}$ tenminste één oplossing voor elke mogelijke \vec{b} ?

- (a) A is een 3×3 matrix met drie pivotposities.
 (b) A is een 4×4 matrix met drie pivotposities.
 (c) A is een 2×5 matrix met twee pivotposities.
 (d) A is een 3×2 matrix met twee pivotposities.

11. Beschouw de onderstaande matrices A en vectoren \vec{b} . Toon aan dat de vergelijking $A\vec{x} = \vec{b}$ niet voor elke \vec{b} een oplossing heeft. Beschrijf de verzameling van alle vectoren \vec{b} waarvoor $A\vec{x} = \vec{b}$ wél een oplossing heeft.

▣ (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

▣ (b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

▣ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

▣ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -8 \end{bmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

- ▣ 12. Stel drie verschillende uitgebreide matrices op voor lineaire systemen met als oplossingsverzameling $\{(-2, 1, 0)\}$.
- ▣ 13. De oplossingen (x, y, z) van een lineaire vergelijking

$$ax + by + cz = d, \quad \text{met } a, b, c \text{ niet allen } 0,$$

vormen een vlak in \mathbb{R}^3 . Geef een voorbeeld van een verzameling van drie vlakken die

- (a) snijden in een punt,
 (b) snijden in een rechte,
 (c) geen gemeenschappelijke punten hebben.
- ▣ 14. Construeer een 2×3 matrix A die niet in echelonvorm staat en waarvoor
- (a) de oplossing van $A\vec{x} = \vec{0}$ een rechte in \mathbb{R}^3 is,
 (b) de oplossing van $A\vec{x} = \vec{0}$ een vlak in \mathbb{R}^3 is.
- ▣ 15. Zoek de gereduceerde echelonvorm van een 3×3 matrix A zodanig dat enkel de eerste twee kolommen van A pivotkolommen zijn en

$$A \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

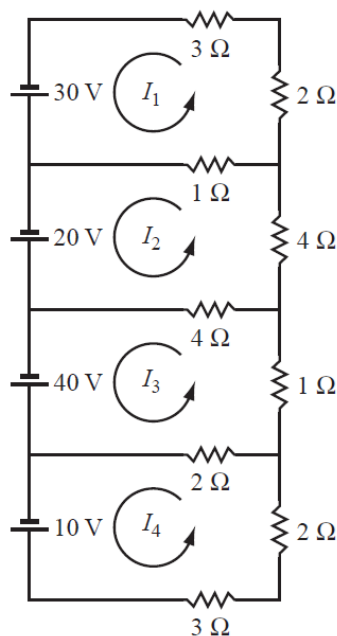
- ▣ 16. Zijn de onderstaande beweringen waar of vals? Als een bewering waar is, geef dan een woordje uitleg. Als een bewering vals is, geef dan een tegenvoorbeeld.
- (a) Een lineair stelsel waarbij de coëfficiëntenmatrix een 3×5 matrix is en drie pivotkolommen heeft, is altijd consistent.
 (b) Een lineair stelsel waarbij de uitgebreide matrix een 3×5 matrix is en de vijfde kolom een pivotkolom is, is altijd inconsistent.

17. Een stelsel met minder vergelijkingen dan onbekenden wordt 'ondergedetermineerd' genoemd. Wat kan je zeggen over het consistent zijn en het aantal oplossingen van dergelijk stelsel?
18. Een stelsel met meer vergelijkingen dan onbekenden wordt 'overgedetermineerd' genoemd. Wat kan je zeggen over het consistent zijn en het aantal oplossingen van dergelijk stelsel?
19. Zijn de onderstaande uitspraken waar of vals voor een $m \times n$ matrix A ?
- Als elke rij van A een pivotpositie heeft, dan heeft $A\vec{x} = \vec{0}$ enkel de nuloplossing.
 - Een stelsel $A\vec{x} = \vec{0}$ is altijd consistent.
 - Het stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ kan inconsistent zijn, zelfs als $A\vec{x} = \vec{0}$ consistent is.
 - Het stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ kan een unieke oplossing hebben als $A\vec{x} = \vec{0}$ meerdere oplossingen heeft.
 - Het stelsel $A\vec{x} = \vec{0}$ kan een unieke oplossing hebben als $A\vec{x} = \vec{b}$ meerdere oplossingen heeft.

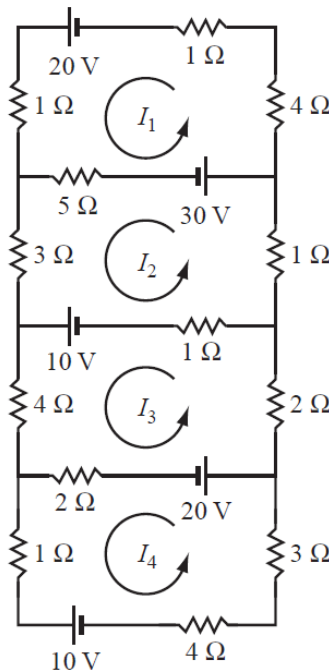
Toepassing: netwerken analyseren

20. Bepaal voor de onderstaande kringen de stroom in elke lus.

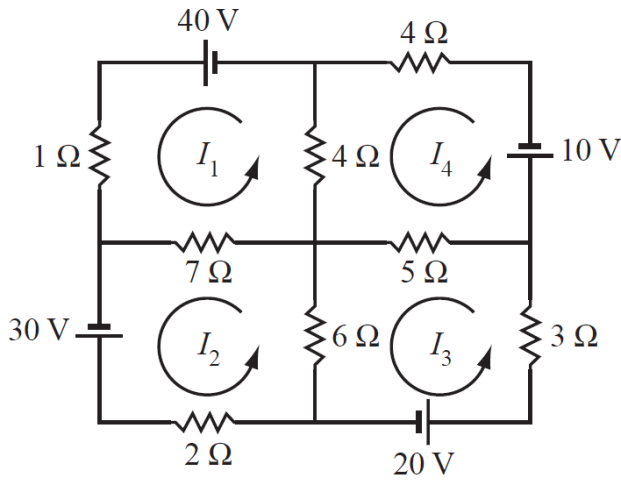
(a)



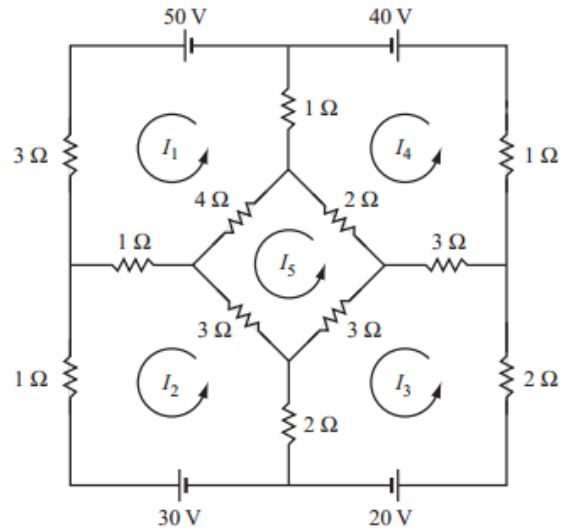
(b)



(c)

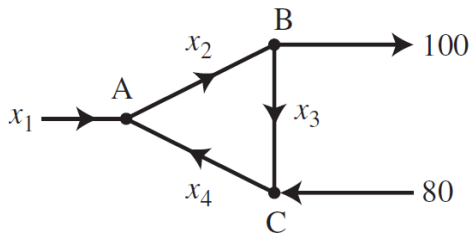


(d)

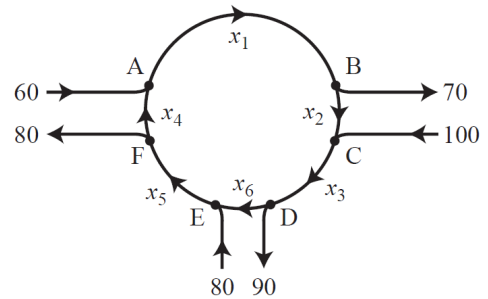


21. Bepaal het algemene stroompatroon van het weergegeven netwerk. Veronderstel dat alle stromen niet-negatief zijn. Wat is de kleinst mogelijke waarde voor x_4 ?

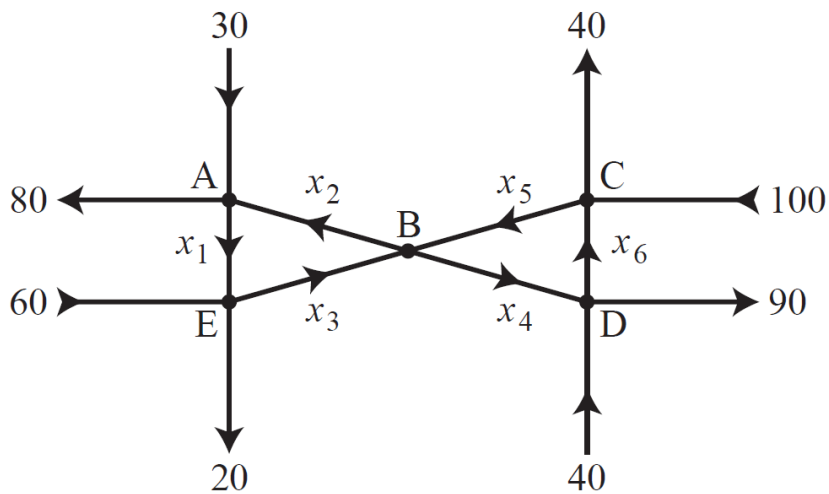
(a)



(b)



22. Beschouw het onderstaand verkeersnetwerk.



(a) Bepaal het algemene stroompatroon van het weergegeven netwerk.

(b) Veronderstel dat alle stromen niet-negatief zijn. Wat is de kleinst mogelijke waarde voor x_2, x_3, x_4 en x_5 ?

Hoofdstuk 2

Vector- en Matrixvoorstelling voor Lineaire Stelsels

In het vorige hoofdstuk hebben we reeds sporadisch met vectoren gewerkt. In dit hoofdstuk gaan we dieper in op de eigenschappen van vectoren en bereiden we ons ondertussen voor op enkele fundamentele concepten, die zullen volgen in de komende hoofdstukken. We zullen onder andere een connectie maken tussen een lineaire combinatie en een stelsel van lineaire vergelijkingen in [Stelling 2.4](#). Deze connectie zal de weg effenen voor een dieper begrip van stelsels. Op het einde van dit hoofdstuk bespreken we een toepassing in de chemie waar de vectornotatie voor stelsels van lineaire vergelijkingen erg nuttig is.

Sectie 2.1 Vectorbewerkingen en Vectorvoorstellingen

Veronderstel dat \mathbb{R}^m de ruimte is van vectoren met m reële componenten. Hieronder geven we twee definities die zullen terugkeren doorheen heel de cursus.

Definitie 2.1 Optelling van Kolomvectoren

Veronderstel dat $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$. De **som** van \vec{u} en \vec{v} is de vector $\vec{u} + \vec{v}$ bepaald door

$$[\vec{u} + \vec{v}]_i = [\vec{u}]_i + [\vec{v}]_i, \quad \text{met } 1 \leq i \leq m.$$

Voorbeeld 2.1

Als

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

dan

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + (-1) \\ -3 + 5 \\ 4 + 2 \\ 2 + (-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}.$$



De tweede bewerking vereist twee verschillende types objecten, een getal en een vector, en combineert deze om een nieuwe vector te construeren. In deze context zullen we het getal een **scalair** noemen om te benadrukken dat het niet om een vector gaat.

Definitie 2.2 Scalaire Vermenigvuldiging van Kolomvectoren

Veronderstel dat $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ en $\alpha \in \mathbb{R}$. Dan is de **scalair vermenigvuldiging** van \vec{u} met α de vector $\alpha\vec{u}$ gedefinieerd door

$$[\alpha\vec{u}]_i = \alpha [\vec{u}]_i, \quad \text{met } 1 \leq i \leq m.$$

Voorbeeld 2.2

Als

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

en $\alpha = 6$, dan

$$\alpha\vec{u} = 6 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(3) \\ 6(1) \\ 6(-2) \\ 6(4) \\ 6(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \\ -12 \\ 24 \\ -6 \end{bmatrix}.$$



Definitie 2.3 Scalair Product van Kolomvectoren

Veronderstel dat $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$. Dan is het **scalair product** van \vec{u} met \vec{v} gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= [\vec{u}]_1 \cdot [\vec{v}]_1 + [\vec{u}]_2 \cdot [\vec{v}]_2 + \dots + [\vec{u}]_m \cdot [\vec{v}]_m \\ &= \sum_{i=1}^m [\vec{u}]_i \cdot [\vec{v}]_i \end{aligned}$$

Voorbeeld 2.3

Als

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \\ -8 \end{bmatrix}$$

dan is het scalair product

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-7) + 4 \cdot (-8) \\ &= -36\end{aligned}$$

⊠

Definitie 2.4 Norm van een Kolomvector

Veronderstel dat $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$. Dan is de **L2-norm** van \vec{u} gedefinieerd door

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{[\vec{u}]_1^2 + [\vec{u}]_2^2 + \dots + [\vec{u}]_m^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m [\vec{u}]_i^2}\end{aligned}$$

Voorbeeld 2.4

Als

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \\ -8 \end{bmatrix}$$

dan zijn de normen

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} \\ &= 30\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\| &= \sqrt{5^2 + 6^2 + (-7)^2 + (-8)^2} \\ &= 174\end{aligned}$$

⊠

De L2-norm is dus altijd een positief getal, dat groter wordt als de componenten van de vector (in absolute waarde) groter worden. De norm kan geïnterpreteerd worden als de lengte van de vector.

Er bestaan ook andere normen dan de L2-norm, maar deze vallen buiten het bestek van deze cursus. De L2-norm wordt ook vaak kortweg de norm genoemd.

Als we [Definitie 2.4](#) naast [Definitie 2.3](#) leggen, zien we dat de norm van een vector gelijk is aan de vierkantswortel van het scalair product van de vector met zichzelf:

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^m [\vec{u}]_i^2} \\ &= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}\end{aligned}$$

Voorbeeld 2.5

Probeer zelf: Gegeven de vectoren $\vec{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, en $\vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Teken de vectoren in het xy -vlak, en bereken de norm van elke vector en het scalair product van elk mogelijk paar van vectoren (er zijn tien verschillende paren te vormen).

Wat valt je op? Wanneer is het scalair product groot of klein, wanneer is het positief of negatief, en wanneer is het 0? ☒

Stelling 2.1 Meetkundige interpretatie van het scalair product van vectoren

Veronderstel dat $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$. Het scalair product is gelijk aan het product van de normen van de vectoren en de cosinus van de hoek tussen de vectoren.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$$

met α de hoek tussen de vectoren.

Deze stelling heeft een aantal belangrijke gevolgen:

- Als \vec{u} en \vec{v} in dezelfde richting wijzen, is $\alpha = 0$, en is het scalair product gelijk aan het product van de normen: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.
- Als \vec{u} en \vec{v} in tegengestelde richting wijzen, is $\alpha = \pi$, en is het scalair product gelijk aan het tegengestelde van het product van de normen: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.
- Als \vec{u} en \vec{v} loodrecht op elkaar staan, is $\alpha = \pm\pi/2$, en is het scalair product 0.
- Als beide normen verschillend van 0 zijn, kan de hoek tussen de vectoren snel berekend worden:

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Eigenschappen van Vectoren

Met de definities voor de optelling van vectoren en de scalaire vermenigvuldiging kunnen we een aantal eigenschappen van deze bewerkingen opsommen en aantonen, alsook sommige eigenschappen die de interactie tussen beide behandelen. We vatten tien van deze eigenschappen samen om later op terug te keren.

Stelling 2.2 Eigenschappen van Kolomvectoren (Deel 1)

Veronderstel dat \mathbb{R}^m de verzameling van kolomvectoren van grootte m is en de optelling en scalaire vermenigvuldiging zoals gedefinieerd in [Definitie 2.1](#) en [Definitie 2.2](#). Dan geldt het volgende.

- **Gesloten onder de Optelling**
Als $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$, dan $\vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^m$.
- **Gesloten onder de Scalaire Vermenigvuldiging**
Als $\alpha \in \mathbb{R}$ en $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, dan $\alpha\vec{u} \in \mathbb{R}^m$.
- **Commutativiteit van de Optelling**
Als $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$, dan $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

...

Stelling 2.3 Eigenschappen van Kolomvectoren (Deel 2)

...

- **Associativiteit van de Optelling**
Als $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^m$, dan $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.
- **Nulvector**
Er bestaat een vector $\vec{0}$, genaamd de **nulvector**, waarvoor geldt $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ voor alle $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$.
- **Tegengesteld element**
Als $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, dan bestaat er een vector $-\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ waarvoor geldt dat $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.
- **Associativiteit voor de Scalaire Vermenigvuldiging**
Als $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, dan $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$.
- **Distributiviteit t.o.v. Optelling van Vectoren**
Als $\alpha \in \mathbb{R}$ en $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$, dan $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$.
- **Distributiviteit t.o.v. Optelling van Scalairen**
Als $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, dan $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.
- **Neutraal element**
Als $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, dan $1\vec{u} = \vec{u}$.

Bewijs Als voorbeeld bewijzen we de voorlaatste eigenschap. Voor de vectoren tonen we elementsgewijs aan dat

$$\begin{aligned} [(\alpha + \beta)\vec{u}]_i &= (\alpha + \beta) [\vec{u}]_i \\ &= \alpha [\vec{u}]_i + \beta [\vec{u}]_i \\ &= [\alpha\vec{u}]_i + [\beta\vec{u}]_i \\ &= [\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}]_i \end{aligned}$$

[Definitie 2.2](#)

Distributiviteit in \mathbb{R}

[Definitie 2.2](#)

[Definitie 2.1](#).

Hieruit volgt de eigenschap. Het bewijs van de andere negen eigenschappen laten we over als oefening voor de lezer. ■

Lineaire Combinaties

Nu volgt een belangrijk begrip dat zonder twijfel een formele definitie verdient.

Definitie 2.5 Lineaire Combinatie van Kolomvectoren

Voor n gegeven vectoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n$ uit \mathbb{R}^m en n scalaren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ is hun **lineaire combinatie** de vector

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n.$$

Deze definitie neemt een gelijk aantal scalaren en vectoren, die ze combineert via de twee nieuwe bewerkingen (scalair vermenigvuldiging en de optelling van vectoren) en zo één nieuwe vector construeert van dezelfde grootte als de originele vectoren. Wanneer in een definitie of stelling gesproken wordt over een lineaire combinatie, denk dan aan de aard van de elementen waaruit de lineaire combinatie bestaat (de lijst van scalaren en vectoren), en de aard van het eindresultaat (een enkele vector).

Voorbeeld 2.6

Stel dat

$$\alpha_1 = 1$$

$$\alpha_2 = -4$$

$$\alpha_3 = 2$$

$$\alpha_4 = -1$$

en

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

dan is hun lineaire combinatie

$$\begin{aligned} \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 + \alpha_4 \vec{u}_4 &= (1) \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} + (-4) \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -24 \\ -12 \\ 0 \\ 8 \\ -4 \\ -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \\ -7 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35 \\ -6 \\ 4 \\ 4 \\ -9 \\ -10 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Een andere lineaire combinatie, met dezelfde verzameling vectoren maar met verschillende scalaren, krijgen we als we

$$\beta_1 = 3 \qquad \beta_2 = 0 \qquad \beta_3 = 5 \qquad \beta_4 = -1$$

nemen en de lineaire combinatie

$$\begin{aligned} \beta_1 \vec{u}_1 + \beta_2 \vec{u}_2 + \beta_3 \vec{u}_3 + \beta_4 \vec{u}_4 &= (3) \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} + (0) \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + (5) \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -9 \\ 3 \\ 6 \\ 27 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -25 \\ 10 \\ 5 \\ 5 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \\ -7 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 \\ 20 \\ 1 \\ 1 \\ -10 \\ 24 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

vormen. Bemerkt hoe we de vectoren onveranderd hebben gelaten en een andere verzameling scalaren hebben gebruikt om twee verschillende vectoren te construeren. Construeer nu zelf ook een aantal nieuwe lineaire combinaties van $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$. Welke vectoren heb je zoal kunnen construeren? Denk je dat je de vector

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 13 \\ 15 \\ 5 \\ -17 \\ 2 \\ 25 \end{bmatrix}$$

kan construeren met een gepaste keuze voor de vier scalaren? Denk je dat je *elke* vector uit \mathbb{R}^6 kan construeren via gepaste keuze voor de scalaren? Deze laatste twee vragen zijn fundamenteel. De tijd nemen om ze nu te beantwoorden zal zeer nuttig blijken voor wat volgt in [Stelling 2.5](#). \square

Voorbeeld 2.7

In dit voorbeeld zullen we [Voorbeeld 1.12](#) herschrijven als vectoren, gelijkheden van vectoren en lineaire combinaties. We kunnen het stelsel van $m = 3$ vergelijkingen schrijven als de volgende vectorvergelijking:

$$\begin{bmatrix} -7x_1 - 6x_2 - 12x_3 \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ x_1 + 4x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 24 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Vervolgens splitsen we de lineaire uitdrukking aan de linkerkant op, eerst via optelling van vectoren,

$$\begin{bmatrix} -7x_1 \\ 5x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6x_2 \\ 5x_2 \\ 0x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12x_3 \\ 7x_3 \\ 4x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 24 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Nu kunnen we elk van deze $n = 3$ vectoren herschrijven als een scalar veelvoud van een vaste vector, waar de scalar één van de onbekende variabelen is, waardoor het linkerlid omgezet wordt in een lineaire

combinatie.

$$x_1 \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 24 \\ 5 \end{bmatrix}$$

We kunnen nu het probleem van het oplossen van het stelsel vergelijkingen zien als het bepalen van de waarden voor de scalaire veelvouden die voldoen aan de vectorvergelijking. Uit de analyse van [Voorbeeld 1.12](#) weten we dat er slechts één oplossing is. Een snelle manier om dit te verifiëren is door de coëfficiëntenmatrix te rij-reduceren tot de 3×3 eenheidsmatrix. De oplossing voor het stelsel is:

$$x_1 = -3 \qquad x_2 = 5 \qquad x_3 = 2.$$

Dus binnen de context van dit voorbeeld kunnen we uitdrukken dat deze waarden voor de variabelen een oplossing zijn door de lineaire combinatie neer te schrijven.

$$(-3) \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + (5) \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 24 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Deze drie scalaires zijn overigens de enige scalaires die voldoen aan deze vergelijking, aangezien ze afkomstig zijn van de unieke oplossing.

Merk op hoe de drie vectoren uit dit voorbeeld de kolommen zijn van de coëfficiëntenmatrix van het stelsel vergelijkingen. Dit is al een eerste indicatie van de interactie tussen vectoren die de kolommen van de matrix vormen en de matrix zelf. \square

Voorbeeld 2.8

[Voorbeeld 1.13](#) kan geschreven worden als een vectorvergelijking:

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Vervolgens splitsen we de lineaire vergelijkingen in het linkerlid op via optelling van vectoren:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_3 \\ x_3 \\ 0x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix},$$

en herschrijven elk van deze $n = 3$ vectoren als scalair veelvoud van een vaste vector, waarbij de scalair een onbekende variabele is. Zodoende zetten we het linkerlid om in een lineaire combinatie

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Rij-reductie van de uitgebreide matrix van [Voorbeeld 1.13](#) vertelt ons dat het stelsel oplosbaar is en vrije variabelen heeft, waardoor het oneindig veel oplossingen heeft. Zo kunnen oplossingen

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3 \qquad x_3 = 1$$

en

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 0$$

gebruikt worden om te stellen dat

$$(2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (3) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (1) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = (3) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (0) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Negeer hierbij het middelste gedeelte van de vergelijking en verplaats alle termen naar het linkerlid,

$$(2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (3) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (1) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-0) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

☒

De twee voorbeelden van hierboven verschaffen ons veel informatie. Door vectoren te gebruiken hebben we een geheel nieuwe manier geïntroduceerd voor het noteren van stelsels vergelijkingen. Het is zeer nuttig om later op deze voorbeelden terug te komen om verbanden te leggen met de leerstof die komen zal. We zullen deze connectie later in meer detail bekijken en vastleggen in een stelling.

Parametrische Vectorvorm voor Oplossingsverzamelingen

Lineaire combinaties maken het ook mogelijk om de oplossingsverzameling van een lineair stelsel op een meer systematische manier neer te schrijven. We schrijven de oplossing van een stelsel vergelijkingen als kolomvector. Zo heeft [Voorbeeld 1.12](#) bijvoorbeeld de oplossing $x_1 = -3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$, die we nu kunnen herschrijven als

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix},$$

We zullen nu kolomvectoren en lineaire combinaties gebruiken om alle oplossingen van een stelsel van lineaire vergelijkingen op een compacte en leesbare manier neer te schrijven. Eerst bekijken we de volgende twee voorbeelden, die ons motiveren tot de daaropvolgende stelling. Dit is een zeer bruikbare techniek, bijna zo belangrijk als de rij-reductie van een matrix, dus zorg ervoor dat je hier voldoende vertrouwd mee geraakt doorheen deze sectie.

Voorbeeld 2.9

Het lineair stelsel met $m = 5$ vergelijkingen in $n = 7$ variabelen

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 + x_6 + 5x_7 &= 21, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 &= -5, \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 5x_4 + x_5 + x_6 - 6x_7 &= -15, \\ 3x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 3x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 2x_7 &= -24, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 - 9x_7 &= -30, \end{aligned}$$

heeft de volgende uitgebreide matrix:

$$[A \quad \vec{b}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 & 2 & 1 & 5 & 21 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -8 & 5 & 1 & 1 & -6 & -15 \\ 3 & 3 & -9 & 3 & 6 & 5 & 2 & -24 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -9 & -30 \end{bmatrix}.$$

Via rij-reductie bekomen we de matrix

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 9 & 15 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & 4 & 0 & 0 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 7 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

We bemerken dat deze $r = 4$ niet-nulrijen heeft. Daarnaast geldt $D = \{1, 2, 5, 6\}$ en $F = \{3, 4, 7, 8\}$. De afhankelijke variabelen zijn daarom x_1, x_2, x_5 , en x_6 . Er zijn ook $n-r = 3$ vrije variabelen, nl. x_3, x_4 en x_7 . We zullen een algemene oplossing voor het stelsel uitdrukken op twee verschillende manieren: via een decompositie en via constructie.

Het oplossen van de vergelijkingen voorgesteld door de rij-gereduceerde matrix van de uitgebreide matrix naar de afhankelijke variabelen van elke rij levert, na herschikking, de volgende vectorvergelijking op:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 - 2x_3 + 3x_4 - 9x_7 \\ -10 + 5x_3 - 4x_4 + 8x_7 \\ x_3 \\ x_4 \\ 11 + 6x_7 \\ -21 - 7x_7 \\ x_7 \end{bmatrix}.$$

We zullen nu de definities van optelling van vectoren en scalaire vermenigvuldiging aanwenden om deze algemene oplossing te ontleden tot een lineaire combinatie,

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2x_3 \\ 5x_3 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_4 \\ -4x_4 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9x_7 \\ 8x_7 \\ 0 \\ 0 \\ 6x_7 \\ -7x_7 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad \text{Definitie 2.1}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_7 \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Definitie 2.2.}$$

Deze finale uitdrukking voor de oplossing noemen we de **parametrische vectorvorm** en zal zeer goed van pas komen. Zo kunnen we zeer snel oplossingen afleiden door waarden te kiezen voor de vrije variabelen, om vervolgens de lineaire combinatie te berekenen. We krijgen, als $x_3 = 2$, $x_4 = -4$ en

$x_7 = 3$,

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-4) \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (3) \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 \\ 40 \\ 2 \\ -4 \\ 29 \\ -42 \\ 3 \end{bmatrix},$$

of wanneer $x_3 = 5$, $x_4 = 2$, $x_7 = 1$, bekomen we

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix} + (5) \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (1) \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 15 \\ 5 \\ 2 \\ 17 \\ -28 \\ 1 \end{bmatrix},$$

of nog, als $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_7 = 0$, dan is het resultaat

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix} + (0) \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (0) \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (0) \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

We kunnen dus op een compacte manier *alle* oplossingen van het lineaire stelsel uitdrukken met slechts vier vectoren, gegeven dat we een lineaire combinatie opstellen om een oplossingsvector te construeren. \square

Sectie 2.2 Span van een verzameling

In de voorgaande paragraaf zagen we hoe we de oplossingsverzameling van een stelsel kunnen beschrijven door alle mogelijke lineaire combinaties van bepaalde vectoren. Dit zal een zeer handige manier blijken te zijn om oneindige verzamelingen vectoren te construeren of te beschrijven, dus gieten we dit idee in de vorm van een definitie.

Definitie 2.6 Span van een Verzameling Kolomvectoren

Gegeven een verzameling van vectoren $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n\}$. Hun **span**, $\text{Span}(S)$, is de verzameling van alle mogelijke lineaire combinaties van $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n$. In symbolen:

$$\begin{aligned} \text{Span}(S) &= \{ \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{u}_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \right\}. \end{aligned}$$

De span is slechts een verzameling van vectoren, alhoewel ze op één geval na steeds oneindig zal zijn. (Wanneer is ze niet oneindig?) We starten dus met een eindige verzameling vectoren S (n vectoren om precies te zijn) en we gebruiken deze eindige verzameling om een oneindige verzameling vectoren, $\text{Span}(S)$, te beschrijven. Het verwarren van de *eindige* verzameling S met de *oneindige* verzameling $\text{Span}(S)$ is één van de grotere obstakels op weg naar inzicht in de inleidende lineaire algebra. We zullen deze constructie herhaaldelijk tegenkomen. We behandelen daarom eerst enkele voorbeelden om ze gewoon te worden. De meest voordehandliggende vraag die we kunnen stellen bij een verzameling is of een gegeven element van de juiste grootte deel uitmaakt van de verzameling of niet.

Voorbeeld 2.10

Beschouw de verzameling S van vijf vectoren uit \mathbb{R}^4

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

en de oneindige verzameling van vectoren $\text{Span}(S)$ bestaande uit alle mogelijke lineaire combinaties van de elementen van S . De volgende vier vectoren zijn met zekerheid elementen van $\text{Span}(S)$, aangezien we ze construeren in lijn met [Definitie 2.6](#),

$$\vec{w} = (2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (1) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + (3) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 28 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$\vec{x} = (5) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (-6) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} + (4) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 \\ -6 \\ 2 \\ 34 \end{bmatrix},$$

$$\vec{y} = (1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (0) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + (1) \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} + (0) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + (1) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 17 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$\vec{z} = (0) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (0) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + (0) \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} + (0) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + (0) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Het doel van een verzameling is om objecten met dezelfde eigenschappen te groeperen en objecten die die eigenschappen niet bezitten uit te sluiten. De meest fundamentele vraag omtrent een verzameling is, zoals eerder al vermeld, of een gegeven object een element is van de verzameling of niet. We zullen meer te weten komen over $\text{Span}(S)$ door te onderzoeken welke vectoren deel uitmaken van de verzameling en welke niet.

Om te beginnen, is $\vec{u} = \begin{bmatrix} -15 \\ -6 \\ 19 \\ 5 \end{bmatrix}$ een element van $\text{Span}(S)$?

We vragen of er scalair $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ bestaan zodat

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{u} = \begin{bmatrix} -15 \\ -6 \\ 19 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Gelijkaardig aan wat we gezien hebben in de paragraaf over lineaire combinaties, zien we gelijkenissen tussen het zoeken naar de juiste scalair en het zoeken naar de oplossing van het stelsel van lineaire vergelijkingen via de uitgebreide matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 & -1 & -15 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 5 & -1 & 9 & 19 \\ 1 & -1 & -5 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

hetgeen we kunnen rij-reduceren tot

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hier zien we dat het stelsel oplosbaar is ([Stelling 1.5](#)), dus we weten met zekerheid dat er een oplossing *is* voor de vijf scalair $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$. Dit is voldoende bewijs om te kunnen stellen dat $\vec{u} \in \text{Span}(S)$. We kunnen de stelling volledig hard maken door de feitelijke waarden te bepalen. Zo krijgen we

$$\alpha_1 = 2 \qquad \alpha_2 = 1 \qquad \alpha_3 = -2 \qquad \alpha_4 = -3 \qquad \alpha_5 = 2.$$

Als we deze waarden invullen in de vergelijking zien we dat

$$(2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (1) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{u} = \begin{bmatrix} -15 \\ -6 \\ 19 \\ 5 \end{bmatrix},$$

waardoor het expliciet duidelijk is dat $\vec{u} \in \text{Span}(S)$.

We herhalen dit voor een andere vector. Is $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ een element van $\text{Span}(S)$? We vragen m.a.w.

of er scalair $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ bestaan zodat

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Opnieuw zien we hier de analogie met het zoeken naar een oplossing voor het lineaire stelsel vergelijkingen via de uitgebreide matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -1 & 9 & 2 \\ 1 & -1 & -5 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

die we rij-reduceren tot

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}.$$

Hieruit leiden we af dat het stelsel onoplosbaar is, op basis van [Stelling 1.5](#), waardoor we weten dat er geen oplossing bestaat voor de vijf scalaren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$. Dit is voldoende bewijs om te kunnen zeggen dat $\vec{v} \notin \text{Span}(S)$. \square

Voorbeeld 2.11

Begin met de eindige verzameling S van drie vectoren van grootte 3

$$S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

en beschouw de oneindige verzameling $\text{Span}(S)$. De vectoren van S konden eender welke waarden aannemen, maar voor redenen die later duidelijk zullen worden, nemen we hier de drie kolommen van de coëfficiëntenmatrix uit [Voorbeeld 1.13](#). Bemerkt eerst, als bij wijze van voorbeeld, dat

$$\vec{v} = (5) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (7) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 14 \\ 2 \end{bmatrix}$$

in $\text{Span}(S)$ bevat zit, aangezien het een lineaire combinatie is van $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$. We noteren dit bondig als $\vec{v} \in \text{Span}(S)$. Er is niets bijzonder aan de scalaren $\alpha_1 = 5, \alpha_2 = -3, \alpha_3 = 7$, omdat we ze vrij konden kiezen. Herhaal daarom dit deel van het voorbeeld met zelfgekozen waarden voor $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Wat gebeurt er als we nul kiezen voor alle drie de scalaren?

We weten nu hoe we snel enkele elementen van de verzameling $\text{Span}(S)$ kunnen construeren. Een lichtelijk andere vraag dringt zich op wanneer we een vector van de juiste grootte gegeven krijgen en er gevraagd wordt of de vector een element is van $\text{Span}(S)$. Is $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$ bijvoorbeeld bevat in $\text{Span}(S)$?

Om deze vraag te kunnen beantwoorden, zoeken we naar scalaren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ opdat

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 = \vec{w}.$$

Oplossingen voor deze vectorvergelijking zijn ook oplossingen voor het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 1, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 8, \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 5. \end{aligned}$$

De corresponderende uitgebreide matrix rij-reduceren levert de volgende matrix op

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dit stelsel heeft oneindig veel oplossingen (er is een vrije variabele, x_3), maar we hebben maar één oplossingsvector nodig. De oplossing

$$\alpha_1 = 2 \qquad \alpha_2 = 3 \qquad \alpha_3 = 1$$

geeft ons dat

$$(2)\vec{u}_1 + (3)\vec{u}_2 + (1)\vec{u}_3 = \vec{w},$$

waardoor we snel kunnen afleiden dat \vec{w} daadwerkelijk bevat is in $\text{Span}(S)$. Bemerkt dat er oneindig veel manieren zijn om tot een juist antwoord op deze vraag te komen. We kunnen een andere oplossing kiezen. Deze keer kiezen we nul voor de vrije variabele,

$$\alpha_1 = 3 \qquad \alpha_2 = 2 \qquad \alpha_3 = 0,$$

waaruit we afleiden dat

$$(3)\vec{u}_1 + (2)\vec{u}_2 + (0)\vec{u}_3 = \vec{w}.$$

Controle van het rekenwerk in deze tweede vergelijking zorgt ervoor dat er geen twijfel bestaat over dat \vec{w} in deze span bevat zit. Daarnaast zien we ook dat er oneindig veel manieren zijn om ervoor te zorgen dat \vec{w} een element van $\text{Span}(S)$ is.

We stellen nu dezelfde vraag, ditmaal voor een andere vector $\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$; is $\vec{y} \in \text{Span}(S)$?

We zoeken scalair $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ waarvoor

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3 = \vec{y}.$$

Oplossingen voor deze vectorvergelijking zijn ook oplossingen voor het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 2, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 4, \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 3. \end{aligned}$$

Rij-reductie van de bijhorende uitgebreide matrix geeft als resultaat

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}.$$

Dit stelsel is onoplosbaar volgens [Stelling 1.5](#) (er staat een leidende 1 in de laatste kolom), waardoor er geen scalair $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ zijn die een lineaire combinatie van $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ vormen gelijk aan \vec{y} . Er volgt dus dat $\vec{y} \notin \text{Span}(S)$. \square

Er zijn drie belangrijke zaken om op te merken aan dit voorbeeld:

1. Het is eenvoudig om vectoren uit $\text{Span}(S)$ te construeren.
2. Het is mogelijk dat sommige vectoren in $\text{Span}(S)$ bevat zitten (zoals \vec{w}), terwijl anderen er niet in bevat zijn (zoals \vec{y}).
3. Bepalen of een gegeven vector in $\text{Span}(S)$ bevat zit leidt tot het oplossen van een lineair stelsel vergelijkingen en de vraag of dat stelsel oplosbaar is of niet.

Zou je, met een rekenprogramma bij de hand dat stelsels van lineaire vergelijkingen kan oplossen, een programma kunnen opstellen dat kan bepalen of een gegeven vector deel uitmaakt van een gegeven span van vectoren? Dit voorbeeld kwam voort uit de kolommen van de coëfficiëntenmatrix uit [Voorbeeld 1.13](#). Bestudeer de vaststelling dat $\vec{v} \in \text{Span}(S)$ en bekijk of je dit in verband kunt brengen met sommige van de eigenschappen van [Voorbeeld 1.13](#). We raden aan om dezelfde denkoefening te maken voor [Voorbeeld 1.12](#).

Voorbeeld 2.12

Begin met de eindige verzameling B van drie vectoren van grootte 3 die overeenstemmen met de coëfficiëntenmatrix uit [Voorbeeld 1.12](#),

$$R = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \right\},$$

en beschouw de oneindige verzameling $\text{Span}(R)$. Bemerkt eerst, als voorbeeld, dat

$$\vec{x} = (2) \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + (4) \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ -10 \end{bmatrix}$$

bevat is in $\text{Span}(R)$, aangezien deze een lineaire combinatie is van $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Met andere woorden, $\vec{x} \in \text{Span}(R)$. Probeer zelf een aantal andere waarden voor $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ uit en bekijk welke vectoren je kunt bekomen als elementen van $\text{Span}(R)$.

Bekijk nu of een gegeven vector een element is van $\text{Span}(R)$. Is $\vec{z} = \begin{bmatrix} -33 \\ 24 \\ 5 \end{bmatrix}$ bijvoorbeeld een element van $\text{Span}(R)$? Hiervoor dienen we de gepaste waarden voor de scalairen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ te bepalen zodat

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \vec{z}.$$

Het corresponderende stelsel van lineaire vergelijkingen ziet er als volgt uit:

$$\begin{aligned} -7\alpha_1 - 6\alpha_2 - 12\alpha_3 &= -33, \\ 5\alpha_1 + 5\alpha_2 + 7\alpha_3 &= 24, \\ \alpha_1 + 4\alpha_3 &= 5. \end{aligned}$$

Voor de rij-gereduceerde uitgebreide matrix van het stelsel krijgen we

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{bmatrix}.$$

Het stelsel heeft een unieke oplossing, namelijk

$$\alpha_1 = -3 \qquad \alpha_2 = 5 \qquad \alpha_3 = 2,$$

waaruit af te leiden valt dat

$$(-3)\vec{v}_1 + (5)\vec{v}_2 + (2)\vec{v}_3 = \vec{z}.$$

We zijn dus zeker dat \vec{z} in $\text{Span}(R)$ zit. Bemerkt dat er in dit geval slechts één manier is om deze vraag te beantwoorden, net omdat er een unieke oplossing is voor het stelsel.

We onderzoeken nu een andere vector: is $\vec{x} = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}$ een element van $\text{Span}(R)$?

We willen scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ vinden met

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \vec{x},$$

waarbij oplossingen voor de vectorvergelijking corresponderen met oplossingen van het stelsel

$$\begin{aligned} -7\alpha_1 - 6\alpha_2 - 12\alpha_3 &= -7, \\ 5\alpha_1 + 5\alpha_2 + 7\alpha_3 &= 8, \\ \alpha_1 + 4\alpha_3 &= -3. \end{aligned}$$

Oplossen via de Gauss-Jordan eliminatie van de uitgebreide matrix geeft

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{bmatrix}.$$

De unieke oplossing van het stelsel,

$$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = 2 \qquad \alpha_3 = -1,$$

leidt tot de oplossing voor de vectorvergelijking

$$(1)\vec{v}_1 + (2)\vec{v}_2 + (-1)\vec{v}_3 = \vec{x},$$

waardoor geldt dat \vec{x} zeker in $\text{Span}(R)$ zit. Opnieuw is er slechts één mogelijke manier om een lineaire combinatie te maken die aantoont dat $\vec{x} \in \text{Span}(R)$. We zouden nog meer vectoren kunnen bekijken om te zien of ze in $\text{Span}(R)$ bevat zijn, maar dit biedt weinig meerwaarde. De vraag omtrent lidmaatschap van de verzameling $\text{Span}(R)$ laat zich herleiden tot een stelsel van drie vergelijkingen in drie variabelen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ met een coëfficiëntenmatrix die opgebouwd is uit de vectoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Het is deze coëfficiëntenmatrix die aanleiding geeft tot een rij-gereduceerde echelonvorm met een pivotelement in elke kolom, waardoor het stelsel steeds oplosbaar is. (Hier is ze ook uniek, maar dat is hier minder van belang.) We stellen daardoor *altijd* vast dat een vector deel uitmaakt van $\text{Span}(R)$, *ongeacht* de keuze van de vector. We bekommen met andere woorden dat elke vector van grootte 3 bevat is in $\text{Span}(R)$, of in symbolen $\text{Span}(R) = \mathbb{R}^3$. \square

Voorbeeld 2.13

Een speciaal geval is de span van een lege verzameling. Voorlopig is het voldoende om te onthouden dat de span van een lege verzameling één element bevat, namelijk de nulvector:

$$\text{Span}(\{\}) = \{\vec{0}\}$$

\square

Sectie 2.3 Matrixvoorstellingen voor Lineaire Stelsels

We weten hoe we vectoren moeten optellen en hoe ze te vermenigvuldigen met scalaren. Door deze twee bewerkingen kunnen we lineaire combinaties maken en een lineair stelsel voorstellen als een vectorvergelijking. In deze sectie zullen we dieper ingaan op het verband met matrices. Op deze manier komen we tot verrassende en belangrijke resultaten.

We beginnen met een definitie van de manier waarop we een vector vermenigvuldigen met een matrix. We vermeldden al meerdere keren het belang van het vormen van lineaire combinaties van de kolommen van de matrix. Een aantal van de vorige voorbeelden tonen ons aan dat iedere oplossing voor een stelsel van lineaire vergelijkingen aanleiding geeft tot een lineaire combinatie van de kolommen van de coëfficiëntmatrix. Dat leidt tot de volgende definitie.

Definitie 2.7 Matrix-Vectorproduct

Veronderstel dat A een $m \times n$ matrix met kolommen $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ is:

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n]$$

en \vec{u} de vector van grootte n is. Dan is het **matrix-vectorproduct** van A met

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

de lineaire combinatie

$$A\vec{u} = u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 + u_3\vec{a}_3 + \cdots + u_n\vec{a}_n.$$

Het matrix-vectorproduct is dus een andere soort vermenigvuldiging. Merk op dat als we een $m \times n$ matrix vermenigvuldigen met een vector van de grootte n , we een vector van de grootte m creëren. Als A een niet-vierkante matrix is, dan verandert de grootte van de vector. Door al de lineaire combinaties die we tot nu toe uitgevoerd hebben zou deze berekening al vrij bekend moeten aanvoelen.

Voorbeeld 2.14

Veronderstel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

dan

$$A\vec{u} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

☒

We kunnen nu stelsels van lineaire vergelijkingen voorstellen door een matrix-vectorproduct (Definitie 2.7) en een vectorvergelijking. Dat verklaart uiteindelijk de notatie $A\vec{x} = \vec{b}$. De verbanden tussen

de verschillende voorstellingen van een lineair stelsel worden samengevat in de volgende stelling.

Stelling 2.4 Stelsels van Lineaire Vergelijkingen als Matrixvermenigvuldiging

Stel dat A een $m \times n$ matrix is met kolommen $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ en \vec{b} in \mathbb{R}^m . De matrixvergelijking $A\vec{x} = \vec{b}$ heeft dezelfde oplossing als de vectorvergelijking

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

en dezelfde oplossing als het lineair stelsel met de uitgebreide matrix

$$[A \ \vec{b}] = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n \ \vec{b}].$$

Bewijs Deze stelling vermeldt de equivalentie van drie begrippen. De equivalentie van de eerste twee volgt uit Definitie 2.5. De equivalentie van het tweede en derde begrip werd al bevestigd in het begin van Sectie 1.3. Om dit in te zien schrijf je elk element van de vectorvergelijking uit als een aparte vergelijking. ■

Voorbeeld 2.15

Veronderstel dat het stelsel van lineaire vergelijkingen van [Voorbeeld 1.6](#),

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 + x_5 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 - 3x_5 &= 0 \\ -2x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= -3, \end{aligned}$$

de coëfficiëntenmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 7 & -5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

en constantenvector

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

heeft. Op deze manier zal de vectorvergelijking compact beschreven worden als $A\vec{x} = \vec{b}$. In de vectornotatie kan het stelsel als volgt beschreven worden:

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

⊠

De matrixvoorstelling van een lineair stelsel is ook handig om een fundamentele vraag, die in de volgende hoofdstukken nog zal terugkomen, te beantwoorden: wanneer heeft een lineair stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ een oplossing voor elke \vec{b} ? Alvorens we naar de volgende stelling gaan, zullen we eerst deze vraag beantwoorden met een voorbeeld.

Voorbeeld 2.16

Beschouw de matrix A hieronder. Heeft $A\vec{x} = \vec{b}$ een oplossing voor elke \vec{b} ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

We werken met een 3×3 matrix, dus elke \vec{b} is van de vorm

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Om deze vraag te beantwoorden moet je de uitgebreide matrix van het stelsel construeren en diens rij-gereduceerde echelonvorm berekenen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ -4 & 2 & -6 & b_2 \\ -3 & -2 & -7 & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 7 & 5 & b_3 + 3b_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + 3b_1 - 1/2(b_2 + 4b_1) \end{bmatrix}.$$

Het stelsel heeft enkel een oplossing als voldaan is aan de volgende voorwaarde:

$$b_3 + 3b_1 - \frac{1}{2}(b_2 + 4b_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b_3 + b_1 - \frac{b_2}{2} = 0.$$

Natuurlijk voldoet niet elke $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ aan deze vereiste, dus het stelsel heeft niet voor elke \vec{b} een oplossing. \boxtimes

Wat was verkeerd aan de matrix A in het vorig voorbeeld zodat het stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ geen oplossing had voor elke \vec{b} ? Het probleem bevond zich in de derde rij. De matrix A had geen pivot in die rij, wat leidde tot de voorwaarde waaraan voldaan moest worden opdat \vec{b} een oplossing zou zijn. In de volgende stelling wordt dit inzicht veralgemeend voor een willekeurige matrix.

Stelling 2.5 Oplossingen voor elke \vec{b}

Stel dat $A = [\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n]$ een $m \times n$ matrix is. De volgende vier beweringen zijn equivalent:

1. De matrixvergelijking $A\vec{x} = \vec{b}$ heeft een oplossing voor elke $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.
2. Elke $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ is een lineaire combinatie van de kolommen van A .
3. $\text{Span}(\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}) = \mathbb{R}^m$.
4. A heeft een pivot in elke rij.

Bewijs De equivalentie tussen de drie eerste beweringen komt in essentie voort uit [Stelling 2.4](#). De equivalentie met de vierde bewering kan het best gezien worden door terug te kijken naar het vorig voorbeeld. Als de matrix A geen pivot heeft in iedere rij, dan zal er een voorwaarde zijn vooraleer \vec{b} een oplossing kan zijn. Omgekeerd, indien A een pivot heeft in iedere rij, kan de overeenkomstige oplossing verkregen worden door de rij-gereduceerde echelonvorm van de uitgebreide matrix $[A \ \vec{b}]$ te berekenen. \blacksquare

Sectie 2.4 Homogene Stelsels Vergelijkingen

In deze sectie specialiseren we ons in stelsels van lineaire vergelijkingen waarbij de constante term van elke vergelijking nul is. Zulke stelsels spelen een centrale rol in het bepalen van lineaire onafhankelijkheid van een verzameling vectoren, hetgeen het volgende onderwerp zal zijn van dit hoofdstuk. We zullen meer en meer afstappen van het volledig uitschrijven van stelsels vergelijkingen en de verschillende ideeën uitdrukken in de vorm van matrices. De concepten die geïntroduceerd zullen worden in deze sectie zullen terugkeren doorheen de rest van de cursus. Zoals gebruikelijk starten we met een definitie.

Definitie 2.8 Homogene Stelsels

Een stelsel van lineaire vergelijkingen $A\vec{x} = \vec{b}$ is **homogeen** als de constantenvector de nulvector is, m.a.w. als $\vec{b} = \vec{0}$.

Voorbeeld 2.17

Voor elk niet-homogeen stelsel kunnen we een gelijkaardig, maar licht verschillend, homogeen stelsel bekomen door in elke vergelijking de constante term door nul te vervangen. Voor [Voorbeeld 1.13](#) kunnen we het originele stelsel aanpassen naar een homogeen stelsel.

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0, \\2x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\x_1 + x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Kun je snel een oplossing vinden voor dit stelsel zonder de uitgebreide matrix te rij-reducen?

Bij het bestuderen van [Voorbeeld 2.17](#) heb je mogelijk opgemerkt dat elke variabele op nul zetten *altijd* een oplossing zal zijn van een homogeen stelsel. Dit is exact de materie van volgende stelling.

Stelling 2.6 Homogene Stelsels zijn Oplosbaar

Veronderstel dat een stelsel van lineaire vergelijkingen homogeen is. Dan is het stelsel oplosbaar.

Bewijs Stel elke variabele van het stelsel gelijk aan nul. Wanneer we deze waarden vervangen in elke vergelijking dan worden de linkerleden overal nul, ongeacht de coëfficiënten. Omdat een homogeen stelsel nullen heeft in het rechterlid van elke vergelijking als constante term, is elke vergelijking voldaan. Met deze oplossing voor het stelsel is het stelsel dus oplosbaar. ■

Definitie 2.9 Triviale Oplossing voor Homogene Stelsels Vergelijkingen

Veronderstel dat een homogeen stelsel van lineaire vergelijkingen n variabelen heeft. De oplossing $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ (dus $\vec{x} = \vec{0}$) wordt de **triviale oplossing** genoemd.

Hieronder volgen drie typische voorbeelden waarop we doorheen deze sectie nog zullen terugkomen. Overloop de rijbewerkingen die we uitvoeren om tot de rij-gereduceerde echelonvorm te komen. Bemerkt ook de gelijkenissen en verschillen tussen de voorbeelden.

Voorbeeld 2.18

Voorbeeld 1.12 kan aangepast worden tot een homogeen stelsel:

$$-11x_1 + 2x_2 - 14x_3 = 0,$$

$$23x_1 - 6x_2 + 33x_3 = 0,$$

$$14x_1 - 2x_2 + 17x_3 = 0.$$

De uitgebreide matrix van dit stelsel rij-reduceert tot

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Door [Stelling 2.6](#) is het stelsel oplosbaar, dus betekent de berekening $n - r = 3 - 3 = 0$ dat de oplossingsverzameling slechts één oplossing bevat. Bijgevolg is de triviale oplossing de unieke oplossing. \square

Voorbeeld 2.19

Beschouw het homogene stelsel uit [Voorbeeld 2.17](#).

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

$$x_1 + x_2 = 0.$$

De uitgebreide matrix van dit stelsel kan rij-gereduceerd worden tot

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Door [Stelling 2.6](#) is het stelsel oplosbaar. We zien dat $x_1 + x_3 = 0$ en $x_2 - x_3 = 0$. De berekening $n - r = 3 - 2 = 1$ betekent dat de oplossingsverzameling één vrije variabele heeft, en dus oneindig veel oplossingen. We kunnen de oplossingsverzameling beschrijven d.m.v. de vrije variabele x_3 ,

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| x_1 = -x_3, x_2 = x_3 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

of in parametrische vectorvorm

$$\vec{x} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Meetkundig gezien zijn deze vectoren punten in de drie-dimensionale ruimte die op één rechte door de oorsprong liggen. \square

Voorbeeld 2.20

We beschouwen het homogene stelsel

$$2x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 0,$$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 0, \end{aligned}$$

waarvan de rij-gereduceerde uitgebreide matrix

$$\left[\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

is. Via [Stelling 2.6](#) is het stelsel oplosbaar. De berekening $n - r = 4 - 2 = 2$ betekent dat er vrije variabelen zijn voor de oplossingsverzameling, waardoor er oneindig veel oplossingen zijn. We kunnen de oplossingsverzameling beschrijven d.m.v. de vrije variabelen x_3 en x_4 ,

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) \middle| x_1 = -3x_3 + 2x_4, x_2 = -x_3 + 3x_4 \right\} \\ &= \left\{ \left(\begin{array}{c} -3x_3 + 2x_4 \\ -x_3 + 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) \middle| x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

of in parametrische vectorvorm

$$\vec{x} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

☒

Bemerk dat wanneer we de rijbewerkingen uitvoeren op de uitgebreide matrix van een homogeen stelsel van lineaire vergelijkingen, de laatste kolom van de matrix steeds nul is. Eender welke van de drie toegelaten rijbewerkingen zal steeds nullen in nullen omzetten, dus zal de laatste kolom van de matrix steeds een nul kolom blijven. In dit geval kunnen we evenzeer enkel de coëfficiëntenmatrix beschouwen en veronderstellen dat als de laatste kolom begint met nullen, deze nog altijd enkel nul zal zijn na alle rijbewerkingen. [Voorbeeld 2.20](#) suggereert de volgende stelling.

Stelling 2.7 Homogene Stelsels met Meer Variabelen dan Vergelijkingen

Veronderstel dat een homogeen stelsel van lineaire vergelijkingen m vergelijkingen heeft in n variabelen en $n > m$. Dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen.

Bewijs Noteer het stelsel als $A\vec{x} = \vec{0}$. We veronderstellen dat het stelsel homogeen is, waardoor [Stelling 2.6](#) zegt dat het stelsel oplosbaar moet zijn. De matrix A heeft meer kolommen dan rijen, dus moet het stelsel vrije variabelen hebben, en heeft het stelsel dus oneindig veel oplossingen. ■

[Voorbeeld 2.18](#) en [Voorbeeld 2.19](#) behandelen homogene stelsels waarbij $n = m$ en illustreren een fundamenteel onderscheid tussen de twee voorbeelden. Het ene voorbeeld heeft een unieke oplossing, terwijl het andere er oneindig veel heeft. Er zijn exact twee mogelijkheden voor een homogeen stelsel en dankzij deze twee voorbeelden weten we dat beide daadwerkelijk kunnen voorkomen (in tegenstelling tot het geval waarbij $n > m$, waar [Stelling 2.7](#) ons vertelt dat er slechts één mogelijkheid is voor een homogeen stelsel).

Sectie 2.5 Lineaire Afhankelijkheid

We sluiten het theoretisch luik van dit hoofdstuk af met de notie van lineaire onafhankelijkheid, een begrip dat sterk verband houdt met homogene stelsels.

Definitie 2.10 Lineaire Onafhankelijkheid van Vectoren

Een verzameling vectoren $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\}$ in \mathbb{R}^m is **lineair onafhankelijk** als het stelsel

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

slechts één oplossing heeft, nl. de triviale oplossing. De verzameling is **lineair afhankelijk** als er scalaren $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ bestaan die niet allemaal nul zijn, waarvoor geldt dat

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}.$$

Lineaire onafhankelijkheid is een eigenschap van een verzameling vectoren. Het is eenvoudig om een verzameling vectoren en evenveel scalaren te nemen en daaruit een lineaire combinatie te maken die de nulvector oplevert. Wanneer de eenvoudige manier, nl. alle scalaren nul kiezen, de enige manier is om de nulvector te bekomen, dan zeggen we dat de verzameling lineair onafhankelijk is. Hieronder vind je een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 2.21

Beschouw de verzameling van $n = 4$ vectoren in \mathbb{R}^5 ,

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Om lineaire onafhankelijkheid te bepalen lossen we het volgende stelsel op,

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

We weten dat $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ een oplossing is van dit stelsel, maar dat is hier niet zozeer interessant. Dit is tenslotte altijd het geval, ongeacht welke vectoren we gekozen zouden hebben. We willen weten of er andere, niet-triviale oplossingen zijn. [Stelling 2.4](#) leert ons dat we een oplossing kunnen vinden via oplossingen van het homogene stelsel $A\vec{x} = \vec{0}$, waarbij de coëfficiëntenmatrix deze vier vectoren als kolommen heeft:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De uitgebreide matrix rij-reduceren levert

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

op. We zouden dit homogeen stelsel volledig kunnen oplossen, maar voor dit voorbeeld volstaat één niet-triviale oplossing. De vrije variabele op eender welke niet-nul waarde zetten, zoals $x_4 = 1$, zal de niet-triviale oplossing

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

opleveren, waarmee we de toepassing van [Stelling 2.4](#) kunnen afronden:

$$2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-4) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

We bekommen dus dat S lineair afhankelijk is. ⊠

Voorbeeld 2.22

Beschouw de verzameling $n = 4$ vectoren van \mathbb{R}^5 ,

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Om de lineaire onafhankelijkheid van de verzameling te bepalen lossen we volgend homogeen stelsel op:

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

We weten dat $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ een oplossing zal zijn van deze vergelijking, maar dit is opnieuw niet interessant. Dit is altijd het geval, ongeacht de keuze van vectoren. We willen weten of er andere, niet-triviale oplossingen zijn. Volgens [Stelling 2.4](#) kunnen we zo'n oplossing bekommen via de oplossingen van het homogene stelsel met als coëfficiëntenmatrix de matrix A en als kolommen de vier vectoren. Rij-reductie van de uitgebreide matrix geeft ons

$$[A \quad \vec{0}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uit de vorm van deze matrix leiden we af dat er geen vrije variabelen zijn, waardoor de oplossing uniek is. Omdat het stelsel homogeen is, is deze unieke oplossing net de triviale oplossing. Zo weten we nu dat er slechts één manier is om de vier vectoren te combineren tot $\vec{0}$. In dit geval zeggen we dat de verzameling T lineair onafhankelijk is. \square

Voorbeeld 2.21 en **Voorbeeld 2.22** steunen op het oplossen van een homogeen stelsel vergelijkingen om lineaire afhankelijkheid te bepalen. We kunnen dit proces omzetten in een stelling die ons tijd zal besparen.

Stelling 2.8 Lineair Onafhankelijke Vectoren en Homogene Stelsels

Veronderstel dat A een $m \times n$ matrix is en $S = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n\}$ de verzameling vectoren in \mathbb{R}^m is die de kolommen van A bevat. Dan is S een lineair onafhankelijke verzameling als en slechts als het homogeen stelsel een unieke oplossing heeft.

Bewijs Deze stelling volgt quasi onmiddellijk uit de definities van homogene stelsels en lineaire onafhankelijkheid. \blacksquare

Sectie 2.6 Chemische Vergelijkingen Balanceren

Men komt lineaire stelsels tegen in vrijwel alle deelgebieden van de wetenschap en technologie. We lichten hier een simpele toepassing in de chemie toe, nl. het balanceren van chemische vergelijkingen. Deze toepassing is zeer interessant om te behandelen via de vector- en matrixnotatie die we geïntroduceerd hebben in dit hoofdstuk. Om chemische vergelijkingen te balanceren is het belangrijk om de wet van behoud van massa te kennen.

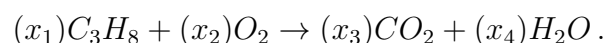
Stelling 2.9 Wet van Behoud van Massa

De massa van een gesloten systeem van stoffen blijft constant, ongeacht het proces binnen het systeem. Massa kan van vorm veranderen, maar niet gecreëerd of vernietigd worden.

Voor elke chemische vergelijking (in een gesloten systeem) moet de massa van de reagenten gelijk zijn aan de massa van de producten. Om ervoor te zorgen dat dit steeds geldt, moet het aantal atomen van elk van de elementen in de reagenten gelijk zijn aan het aantal atomen van diezelfde elementen in de producten. Een voorbeeld is hieronder weergegeven.

Voorbeeld 2.23

Laat ons de chemische vergelijking bekijken die voortvloeit uit het verbrandingsproces van propaangas. Propaan is een populaire keuze voor barbecues en draagbare ovens omdat het lage kookpunt van -42°C propaan doet verdampen van zodra het uit een hogedrukcontainer wordt gelaten, maar comprimeerbaar is tot een transporteerbare vloeistof. Propaan vertoont gelijkaardige ontvlammingsreacties als andere alkanen. In de aanwezigheid van voldoende zuurstof verbrandt propaan om water en koestofdioxide te vormen:



Hieruit kunnen we observeren dat een stelsel van lineaire vergelijkingen dient opgelost te worden om x_1, x_2, x_3, x_4 te bepalen, die overstemmen met het aantal moleculen dat nodig is aan elk van de zijden

van de vergelijking. Om het lineaire stelsel meer exact neer te schrijven, lijsten we eerst de atomen op in elk molecuul:

	C_3H_8	O_2	CO_2	H_2O
C -atomen	3	0	1	0
H -atomen	8	0	0	2
O -atomen	0	2	2	1

Door de wet van behoud van massa is het totaal aantal atomen aan de linkerkant van de vergelijking gelijk aan het aantal atomen aan de rechterkant. Deze voorwaarde kan geschreven worden als de volgende vectorvergelijking:

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

die getransformeerd kan worden naar:

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dit is een goed voorbeeld van het nut van de vectornotatie voor lineaire stelsels. In traditionele notatie krijgen we:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_2 - 1x_3 + 0x_4 &= 0, \\ 8x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 2x_4 &= 0, \\ 0x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 1x_4 &= 0, \end{aligned}$$

en in matrixnotatie

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

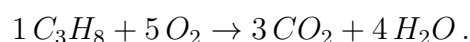
Dankzij de technieken die we hebben behandeld in de eerste twee hoofdstukken vinden we een oplossing via de rij-gereduceerde echelonvorm van de uitgebreide matrix:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -5/4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3/4 & 0 \end{bmatrix}.$$

We bemerken dat x_4 een vrije variabele is en dat de andere variabelen bepaald worden door:

$$x_1 = \frac{1}{4}x_4 \quad x_2 = \frac{5}{4}x_4 \quad x_3 = \frac{3}{4}x_4.$$

De keuze voor $x_4 = 4$ geeft bijvoorbeeld



⊠

Sectie 2.7 Voorbereiding Werkcollege

1. Voor welke waarden van h zal \vec{y} in $\text{Span}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\})$ zitten, als

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{bmatrix}?$$

2. Stel $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{u}$ en \vec{v} vectoren in \mathbb{R}^n . Veronderstel dat de vectoren \vec{u} en \vec{v} in $\text{Span}(\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\})$ zitten. Toon aan dat $\vec{u} + \vec{v}$ ook in $\text{Span}(\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\})$ zit.

3. Stel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 9 & -5 \\ 4 & -8 & -1 & 7 \end{bmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Men kan aantonen dat \vec{p} een oplossing is van $A\vec{x} = \vec{b}$. Gebruik dit om aan te tonen dat \vec{b} een specifieke lineaire combinatie is van de kolommen van A .

4. Construeer een 3×3 matrix A en vectoren \vec{b} en \vec{c} in \mathbb{R}^3 waarvoor $A\vec{x} = \vec{b}$ een oplossing heeft, maar $A\vec{x} = \vec{c}$ niet.

5. Stel

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

- (a) Zijn de verzamelingen $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, $\{\vec{u}, \vec{w}\}$, $\{\vec{u}, \vec{z}\}$, $\{\vec{v}, \vec{w}\}$, $\{\vec{v}, \vec{z}\}$ en $\{\vec{w}, \vec{z}\}$ elk lineair onafhankelijk? Waarom wel of niet?
- (b) Impliceert het antwoord op (a) dat $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ lineair onafhankelijk is?
- (c) Om te bepalen of $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ lineair afhankelijk is, is het verstandig om te checken of \vec{w} een lineaire combinatie is van \vec{u} , \vec{v} en \vec{z} .
- (d) Is $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ lineair afhankelijk?
6. Veronderstel dat $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ een lineair afhankelijke verzameling vectoren is in \mathbb{R}^n en \vec{v}_4 is een vector in \mathbb{R}^n . Toon aan dat $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ ook een lineair afhankelijke verzameling is.

Sectie 2.8 Oefeningen

Bewerkingen met vectoren

1. Beschouw de vectoren \vec{u} en \vec{v} . Bereken $\vec{u} + \vec{v}$ en $\vec{u} - 2\vec{v}$.

(a) $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ en $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ en $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

2. Werk uit.

$$(a) 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$(b) 4 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Scalair product

3. Beschouw de onderstaande vectoren.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Bereken de onderstaande zaken.

$$(a) \vec{u} \cdot \vec{u}$$

$$(c) \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

$$(e) \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

$$(b) \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$(d) \frac{1}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}$$

$$(f) \|\vec{v}\|$$

4. Beschouw de onderstaande vectoren.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Bereken de onderstaande zaken.

$$(a) \vec{u} \cdot \vec{u}$$

$$(c) \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

$$(e) \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

$$(b) \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$(d) \frac{1}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}$$

$$(f) \|\vec{v}\|$$

5. Toon de parallelogramregel aan voor vectoren \vec{u} en \vec{v} in \mathbb{R}^m .

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$$

6. Ga na of de vectoren in de onderstaande verzamelingen loodrecht op elkaar staan.

$$(a) \left\{ \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$(d) \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

$$(b) \left\{ \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$(e) \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ 15 \\ -7 \end{bmatrix} \right\}$$

$$(c) \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}$$

7. Beschouw de twee vectoren \vec{a} en \vec{b} . Bepaal x zodanig dat \vec{a} loodrecht staat op \vec{b} .

$$(a) \vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} x \\ 2-x \end{bmatrix}$$

$$(b) \vec{a} = \begin{bmatrix} 2x \\ 4 \\ -(10+x) \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$$

8. Beschouw de vectoren \vec{u} , \vec{v} en \vec{w} .

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Zoek twee vectoren die beiden loodrecht staan op \vec{u} en \vec{v} .
 (b) Bepaal de vector \vec{x} waarvoor geldt dat $\vec{x} \cdot \vec{u} = 9$, $\vec{x} \cdot \vec{v} = 4$ en $\vec{x} \cdot \vec{w} = 6$.
 (c) Zoek twee vectoren die een even grote hoek maken met \vec{u} , \vec{v} en \vec{w} .

9. Toon aan dat de punten A , B en C de hoekpunten zijn van een rechthoekige driehoek.

- (a) $A(7, 5)$, $B(2, 3)$ en $C(6, -7)$
 (b) $A(-1, 1)$, $B(2, 5)$ en $C(10, -1)$
 (c) $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 4)$ en $C(0, 1, 8)$

Lineaire combinatie en Span van een verzameling

10. Ga na of \vec{b} een lineaire combinatie is van \vec{a}_1 , \vec{a}_2 en \vec{a}_3 .

$$(a) \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$(b) \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$(c) \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$(d) \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

11. Beschouw de onderstaande vector \vec{u} en matrix A . Ligt \vec{u} in het vlak in \mathbb{R}^3 opgespannen door de kolommen van A ? Waarom wel of waarom niet?

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Beschouw de vectoren \vec{v}_1 , \vec{v}_2 en \vec{y} . Voor welke waarde(n) van h ligt \vec{y} in het vlak opgespannen door \vec{v}_1 en \vec{v}_2 ?

(a) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ en $\vec{y} = \begin{bmatrix} h \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$.

(b) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$ en $\vec{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}$.

(c) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}$ en $\vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ h \end{bmatrix}$.

13. Beschouw de onderstaande matrix A en vector \vec{b} en stel $W = \text{Span}(\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\})$.

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

- (a) Zit \vec{b} in $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$? Hoeveel vectoren bevat $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$?
- (b) Zit \vec{b} in W ? Hoeveel vectoren bevat W ?
- (c) Toon aan dat \vec{a}_1 in W zit (rijbewerkingen zijn hierbij overbodig).
14. Omschrijf alle mogelijke (niet-gereduceerde) echelonvormen van een matrix A zoals hieronder beschreven. Noteer een element verschillend van 0 met \blacksquare en een willekeurig element met $*$.
- (a) A is een 3×3 matrix wiens kolommen \mathbb{R}^3 opspannen.
- (b) A is een 3×4 matrix wiens kolommen \mathbb{R}^3 opspannen.
15. Noteer de vector $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ als een som van twee vectoren, de ene op de rechte met vergelijking $y = 2x$ en de andere op de rechte met vergelijking $y = \frac{x}{2}$.
16. Construeer een 3×3 matrix A die niet in echelonvorm staat en waarvan de kolommen \mathbb{R}^3 opspannen. Construeer vervolgens een 3×3 matrix B die niet in echelonvorm staat en waarvan de kolommen \mathbb{R}^3 NIET opspannen.

Lineaire (on)afhankelijkheid

17. Zijn de onderstaande vectoren lineair onafhankelijk? Leg uit.

(a) $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -12 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\blacksquare \text{ (e)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \text{ (f)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \text{ (g)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \text{ (h)} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \text{ (i)} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \text{ (j)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \text{ (k)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \text{ (l)} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ -7 \\ 0 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

\blacksquare 18. Bepaal de waarde(n) van h waarvoor de gegeven vectoren lineair afhankelijk zijn.

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h \\ h+2 \end{bmatrix}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ h \end{bmatrix}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ h \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{(d)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ h \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\text{(e)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}$$

Overkoepelende oefeningen

\blacksquare 19. Bepaal de waarden van h waarvoor \vec{v}_3 in $\text{Span}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$ ligt. Bepaal vervolgens de waarden van h waarvoor $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ lineair afhankelijk is.

$$\text{(a)} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ h \end{bmatrix}$$

$$\text{(b)} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ h \end{bmatrix}$$

$$\text{(c)} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ h \end{bmatrix}$$

20. Zijn de onderstaande beweringen waar of vals? Als een bewering waar is, geef dan een woordje uitleg. Als een bewering vals is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- (a) Als \vec{v}_1 en \vec{v}_2 vectoren zijn in \mathbb{R}^4 en \vec{v}_2 is geen veelvoud van \vec{v}_1 , dan is $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ lineair onafhankelijk.
- (b) Als \vec{v}_1 , \vec{v}_2 en \vec{v}_3 vectoren zijn in \mathbb{R}^3 en \vec{v}_3 is geen lineaire combinatie van \vec{v}_1 en \vec{v}_2 , dan is $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ lineair onafhankelijk.

21. We beschouwen de 3×4 matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Beantwoord de onderstaande vragen telkens met een woordje uitleg.

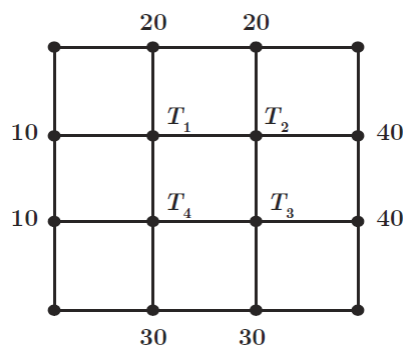
- (a) Heeft het stelsel $A\vec{x} = \vec{0}$ enkel de triviale oplossing?
- (b) Heeft het stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ een oplossing voor elke $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$?
- (c) Is elke $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ een lineaire combinatie van de kolommen van A ?
- (d) Spannen de kolommen van A \mathbb{R}^3 op?
- (e) Zijn de kolommen van A lineair onafhankelijk?

Toepassingen

22. Balanceer de gegeven chemische vergelijkingen.

- (a) $\text{Al}_2\text{O}_3 + \text{C} \rightarrow \text{Al} + \text{CO}_2$
- (b) $\text{H}_3\text{O} + \text{CaCO}_3 \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{Ca} + \text{CO}_2$
- (c) $\text{FeS}_2 + \text{O}_2 \rightarrow \text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{SO}_2$
- (d) $\text{Na}_3\text{PO}_4 + \text{Ba}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{Ba}_3(\text{PO}_4)_2 + \text{NaNO}_3$
- (e) $\text{KMnO}_4 + \text{MnSO}_4 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{MnO}_2 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4$
- (f) $\text{PbN}_6 + \text{CrMn}_2\text{O}_8 \rightarrow \text{Pb}_3\text{O}_4 + \text{Cr}_2\text{O}_3 + \text{MnO}_2 + \text{NO}$
- (g) $\text{MnS} + \text{As}_2\text{Cr}_{10}\text{O}_{35} + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{HMnO}_4 + \text{AsH}_3 + \text{CrS}_3\text{O}_{12} + \text{H}_2\text{O}$

23. Onderstel dat T_1 , T_2 , T_3 en T_4 de temperaturen zijn in de vier inwendige knopen van het rooster. De temperatuur in een knooppunt is het gemiddelde van de temperaturen in de vier dichtst gelegen knopen. De temperaturen in de buitenste knopen zijn gegeven op de onderstaande figuur. Bepaal T_1 , T_2 , T_3 en T_4 .



24. Een portie geraspte tarwe bevat 160 calorieën, 5 gram eiwitten, 6 gram vezels en 1 gram vetten. Een portie Crispix bevat 110 calorieën, 2 gram eiwitten, 0.1 gram vezels en 0.4 gram vetten.
- (a) Stel de matrix B en een vector \vec{u} op zodat $B\vec{u}$ de hoeveelheid calorieën, eiwitten, vezels en vetten weergeeft in een combinatie van drie porties geraspte tarwe en twee porties Crispix.
- (b) Stel dat je cornflakes wil met meer vezels dan Crispix, maar minder calorieën dan geraspte tarwe. Is er een combinatie mogelijk van beide graansoorten die 130 calorieën, 3.2 gram eiwitten, 2.46 gram vezels en 0.64 gram vetten bevat? Zo ja, wat is de combinatie?