FACULTEIT
BIO-INGENIEURSWETENSCHAPPEN

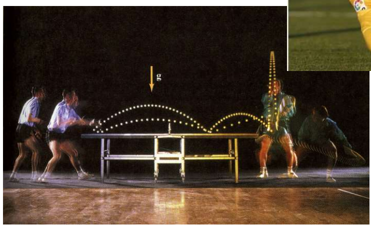
MECHANICA, TRILLINGEN EN GOLVEN

Prof. dr. Dirk Poelman

Bachelor of Science in de bio-ingenieurswetenschappen
Academiejaar 2019 – 2020

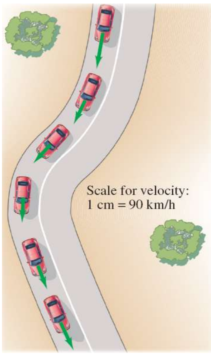
UNIVERSITEIT
GENT

Hoofdstuk 3: Kinematica in twee en drie dimensies

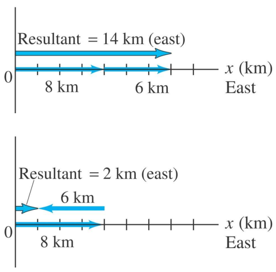


Vectoren en scalairen (3-1)

- Kinematica in 2D en 3D: plaats-, snelheids- en versnellingsvectoren
- Kunnen niet meer zomaar opgeteld worden!



Optellen van vectoren – grafische methoden (3-2)

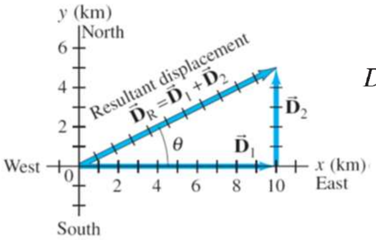


Voor vectoren in één dimensie volstaat **optellen** en **aftrekken**.

Let op met de **tekens** (zie figuur)!

Optellen van vectoren – grafische methoden (3-2)

Vectoren **loodrecht** op elkaar: verplaatsing volgt uit de stelling van Pythagoras



$$D_R = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}$$

Optellen van vectoren – grafische methoden (3-2)

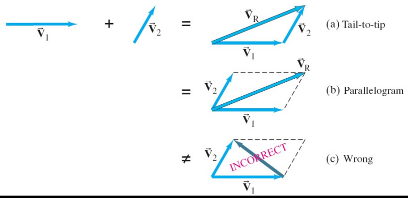
- Optellen van vectoren is commutatief:

$$\vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{V_2} + \vec{V_1}$$

- Optellen van vectoren is associatief:

$$\vec{V_1} + \left(\vec{V_2} + \vec{V_3}\right) = \left(\vec{V_1} + \vec{V_2}\right) + \vec{V_3}$$

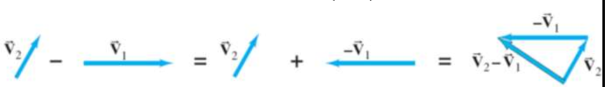
- Grafisch vectoren optellen:



Aftrekken van vectoren en vermenigvuldiging van een vector met een scalair (3-3)

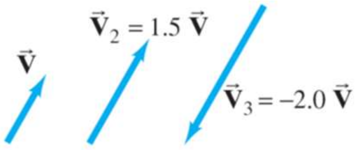
- Aftrekken van 2 vectoren:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



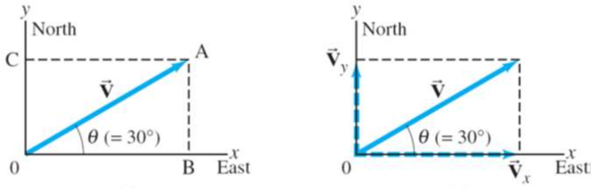
Aftrekken van vectoren en vermenigvuldiging van een vector met een scalair (3-3)

- Vermenigvuldigen van vector $\vec{V}$ met scalair c:
  Vector met grootte (lengte) cV en dezelfde richting als $\vec{V}$ (is c negatief, dan wijzigt wel de zin van de vector)

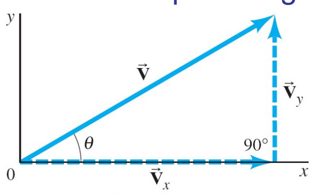


Vectoren componentsgewijs optellen (3-4)

Voorbeeld in 2 dimensies:



Vectoren componentsgewijs optellen (3-4)



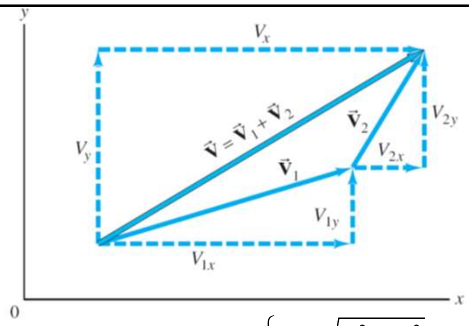
$$\sin\theta = \frac{V_y}{V}$$

$$\cos\theta = \frac{V_x}{V}$$

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x}$$

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2$$

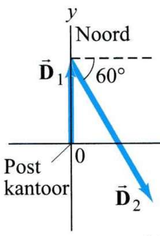
Bij twijfel over tekens: maak een schets!



$$\begin{cases} V_x = V_{1x} + V_{2x} \\ V_y = V_{1y} + V_{2y} \end{cases} \qquad \begin{cases} V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{V_y}{V_x} \end{cases}$$

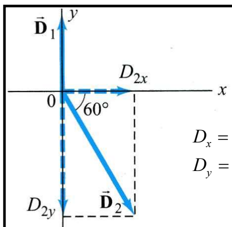
Voorbeeld 3.2 De verplaatsing van een postbode

Een postbode op het platteland rijdt vanaf het postkantoor 22,0 km in een noordelijke richting. Vervolgens rijdt ze 47,0 km naar het zuidoosten, onder een hoek van 60,0° (fig. 3.13a). Wat is haar verplaatsing vanaf het postkantoor?

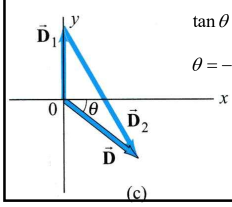


(a)

$$D_{1x} = 0$$
$$D_{1y} = 22,0km$$
$$D_{2x} = +(47,0km)(\cos 60°) = 23,5km$$
$$D_{2y} = -(47,0km)(\sin 60°) = -40,7km$$



(b)



(c)

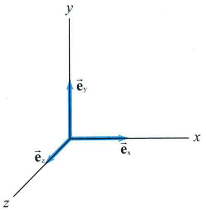
$$D_x = D_{1x} + D_{2x} = 0km + 23,5km = 23,5km$$
$$D_y = D_{1y} + D_{2y} = 22,0km + (-40,7km) = -18,7km$$

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(23,5km)^2 + (-18,7km)^2} = 30,0km$$
$$\tan\theta = \frac{D_y}{D_x} = \frac{-18,7km}{23,5km} = -0,796$$
$$\theta = -38,5°$$

Eenheidsvectoren (3-5)

- Eenheidsvectoren: vectoren met lengte 1, gelegen langs de assen van het gekozen coördinaatsysteem
- Keuze van de assen: hangt af van het probleem; meestal een rechtshandig orthonormaal assenstelsel
- Benaming: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ of $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

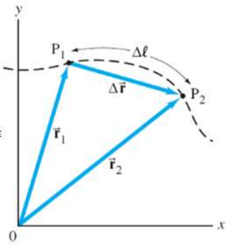
$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z$$
$$= V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$
$$= V_x\vec{e}_x + V_y\vec{e}_y + V_z\vec{e}_z$$



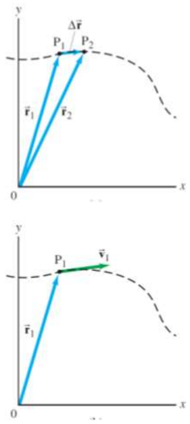
Vectorkinematica (3-6)

- Veralgemening van definities van snelheid en versnelling
- Verplaatsing van een deeltje van $\mathbf{r_1}$ naar $\mathbf{r_2}$:

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z$$
$$\vec{r}_2 = x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y + z_2\vec{e}_z$$
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$
$$= (x_2 - x_1)\vec{e}_x + (y_2 - y_1)\vec{e}_y + (z_2 - z_1)\vec{e}_z$$



Snelheid in 3D



- Gemiddelde snelheidsvector

$$\text{gemiddelde snelheidsvector} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

- Momentane snelheidsvector:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Altijd gericht langs de raaklijn aan de baan

Snelheid in 3D

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right)$$

$$= \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$$

$$= v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \frac{d\vec{e}_y}{dt} = \frac{d\vec{e}_z}{dt} = 0\right)$$

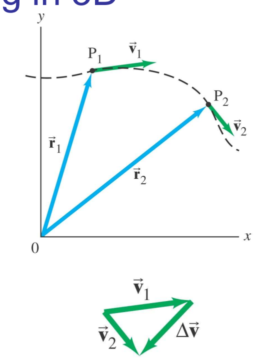
Versnelling in 3D

- Gemiddelde versnellingsvector:

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

- Momentane versnellingsvector:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$



Versnelling in 3D

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{e}_y + \frac{dv_z}{dt}\vec{e}_z$$

$$= a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z$$

Handen uit de mouwen: vragen

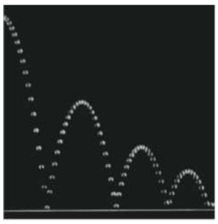
- Hebben versnellingsvector en snelheidsvector altijd dezelfde richting?
- Als de grootte van de snelheid constant is, is dan de versnelling nul?

x-component (horizontaal)	
$v_x = v_{x0} + a_x t$	(vgl. 2.12a)
$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	(vgl. 2.12b)
$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$	(vgl. 2.12c)

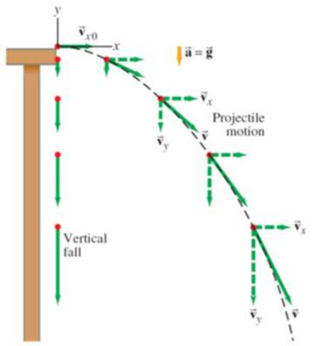
y-component (verticaal)
$v_y = v_{y0} + a_y t$
$y = y_0 + v_{y0} t + \frac{1}{2} a_y t^2$
$v_y^2 = v_{y0}^2 + 2a_y(y - y_0)$

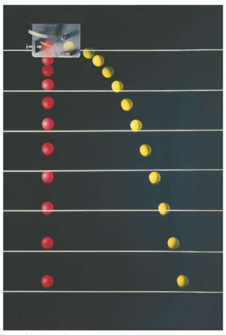
De kogelbaan (3-7)
Ballistiek: alleen zwaartekracht na het afschieten

- Kogelbaan = beweging van een voorwerp dat onder een hoek de lucht in geschoten wordt.
- Voorlopig: verwaarlozen van luchtweerstand.

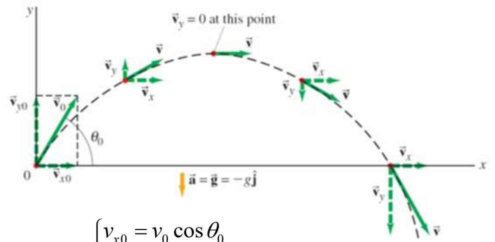


De kogelbaan (3-7)





Het oplossen van kogelbaanvraagstukken (3.8)

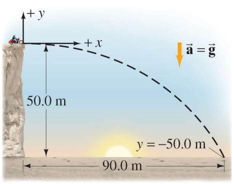


$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{x0} = v_0 \cos\theta_0 \\ v_{y0} = v_0 \sin\theta_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_{x0} = v_0 \cos\theta_0 \\ v_y = v_{y0} - gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v_{x0}t \\ y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Voorbeeld 3.6 Van een rots af rijden

Een filmstuntman rijdt op een motor horizontaal van een 50,0 m hoge rots af. Hoe snel moet de motor van de rots af rijden om op de grond eronder te landen op 90,0 m van de voet van de rots waar de camera's zijn? Verwaarloos de luchtweerstand.



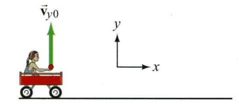
a = - g = - 9,80 m/s^2

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{-2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50,0m}{9,80\,m/s^2}} = 3,19s$$

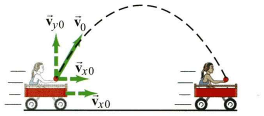
$$x = v_x t \Rightarrow v_x = \frac{x}{t} = \frac{90,0m}{3,19s} = 28,2\frac{m}{s}$$

Conceptvoorbeeld 3.8 Waar landt de appel?

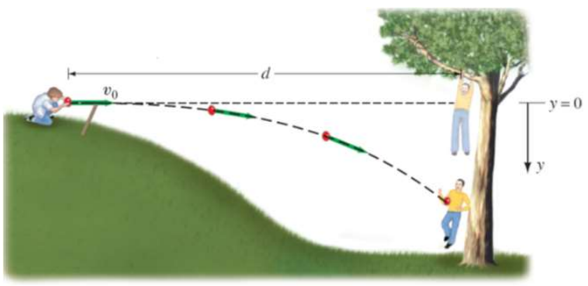
Een kind zit rechtop in een kar die met constante snelheid naar rechts beweegt, zoals in fig. 3.25. Het kind strekt haar hand uit en gooit een appel recht omhoog (vanuit haar gezichtspunt, fig. 3.25a), terwijl de kar met constante snelheid vooruit blijft rijden. Als de luchtweerstand wordt verwaarloosd, landt de appel dan (*a*) achter de kar, (*b*) in de kar, of (*c*) voor de kar?



(a) Referentiestelsel ten opzichte van de kar



(b) Referentiestelsel ten opzichte van de grond



Voorbeeld 3.10 Bepalen van het horizontale bereik

(*a*) Leid een formule af voor het horizontale bereik *R* van een kogel in termen van zijn beginsnelheid v_0 en de hoek θ_0. Het horizontale *bereik* is gedefinieerd als de horizontale afstand die de kogel aflegt voordat hij terugkeert naar zijn oorspronkelijke hoogte (gewoonlijk de grond); dat wil zeggen: y (eind) = y_0. Zie fig. 3.27a. (*b*) Stel dat een van Napoleons kanonnen een kogel kon afschieten met een snelheid v_0 van 60,0 m/s. Onder welke hoek zou dit kanon gericht moeten zijn (luchtweerstand verwaarlozen) om een doel op 320 m afstand te raken?

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt \Rightarrow t_{h\max} = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$$

$$t_{tot} = 2t_{h\max} = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}$$

$$(a): R = v_{0x} t_{tot} = v_0 \cos\theta_0 \cdot \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

$$\Rightarrow R_{\max} : \theta_0 = 45° \quad ; \quad R \approx v_0^2$$

Voorbeeld 3.10 Bepalen van het horizontale bereik

(*a*) Leid een formule af voor het horizontale bereik *R* van een kogel in termen van zijn beginsnelheid v_0 en de hoek θ_0. Het horizontale *bereik* is gedefinieerd als de horizontale afstand die de kogel aflegt voordat hij terugkeert naar zijn oorspronkelijke hoogte (gewoonlijk de grond); dat wil zeggen: y (eind) = y_0. Zie fig. 3.27a. (*b*) Stel dat een van Napoleons kanonnen een kogel kon afschieten met een snelheid v_0 van 60,0 m/s. Onder welke hoek zou dit kanon gericht moeten zijn (luchtweerstand verwaarlozen) om een doel op 320 m afstand te raken?

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

$$\sin 2\theta_0 = \frac{Rg}{v_0^2} = \frac{320m \cdot 9{,}80\, m/s^2}{\left(60{,}0\, m/s\right)^2} = 0{,}871$$

$$\Rightarrow 2\theta_0 = \arcsin\left(0{,}871\right) = 60{,}6° \quad \text{of} \quad 119{,}4°$$

$$\Rightarrow \theta_0 = 30{,}3° \quad \text{of} \quad 59{,}7°$$

Kogelbaan als parabool

$$\begin{cases} x = v_{x0}t \Rightarrow t = \dfrac{x}{v_{x0}} \\ y = v_{y0}t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}}\right)x - \left(\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x0}^2}\right)x^2$$

$$\Rightarrow y = \left(\tan\theta_0\right)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta_0}\right)x^2$$

Vragen

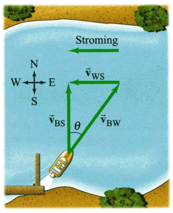
- Een kind raakt met zijn katapult een muur. Hoe kan hij, enkel door een meetlat te gebruiken, bepalen met welke snelheid het projectiel uit zijn katapult vertrok?
- Op welk punt in de baan van een kogel is zijn snelheid het kleinst?

Relatieve snelheid (3.9)

- Snelheid van een **b**oot t.o.v. het **w**ater: $\vec{v}_{BW}$
- Snelheid van het **w**ater t.o.v. de oever (het **s**trand): $\vec{v}_{WS}$
- Snelheid van de **b**oot t.o.v. het **s**trand:

$$\vec{v}_{BS} = \vec{v}_{BW} + \vec{v}_{WS}$$

- Merk op: $\vec{v}_{BS} = -\vec{v}_{SB}$



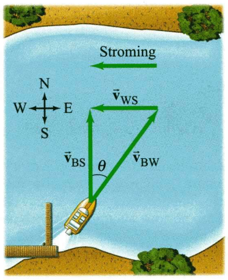
Voorbeeld 3.14 Stroomopwaarts varen

De snelheid van een boot in stilstaand water is v_{BW} = 1,85 m/s. Als de boot een rivier recht over moet steken, waarvan de stroming snelheid v_{WS} = 1,20 m/s heeft, volgens welke hoek stroomopwaarts moet de boot dan koersen? (Zie fig. 3.33.)

$$\vec{v}_{BS} = \vec{v}_{BW} + \vec{v}_{WS}$$

$$\sin\theta = \frac{v_{WS}}{v_{BW}} = \frac{1,20\,m/s}{1,85\,m/s} = 0,6486$$

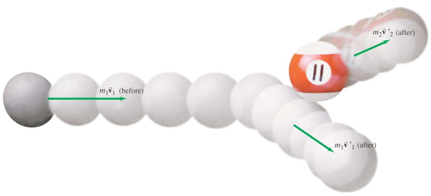
$$\Rightarrow \theta = \arcsin\left(0,6486\right) = 40,4°$$



Hoofdstuk 9: Impuls

Behoudswetten in de natuur(kunde)

- Energie
- **Impuls**
- Impulsmoment
- Lading
- …



Impuls en de relatie met kracht (9.1)

- **Definitie**:
  De impuls $\vec{p}$ van een puntmassa is het product van de massa m en de snelheid:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- **Eigenschappen**:
  - Vectoriële grootheid
  - SI-eenheid: kg.m/s
  - Newton: bewegingshoeveelheid (quantity of motion)

2e Wet van Newton

- Oorspronkelijke formulering door Newton:

De snelheid van de verandering van impuls van een voorwerp is gelijk aan de nettokracht die erop uitgeoefend wordt.

$$\Sigma\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}.$$

- Algemener dan de versie **F**=m**a**, want ook geldig voor een variabele massa

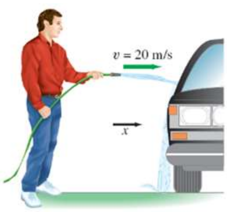
Voorbeeld 9.2 De auto wassen: verandering van impuls en kracht

Per seconde stroomt 1,5 kg water met een snelheid van 20 m/s uit een slang. De straal wordt op de auto gericht, die het water tot stilstand brengt, fig. 9.2. (We houden dus geen rekening met terugspattend water.) Hoe groot is de kracht die door het water op de auto uitgeoefend wordt?

$$F_{\text{op water}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv_2 - mv_1}{\Delta t}$$

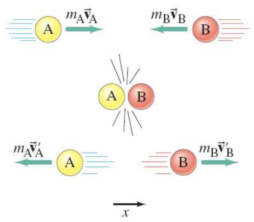
$$= \frac{0 - 1,5kg \cdot 20\,m/s}{1,0s} = -30N$$

$$\Rightarrow F_{\text{op auto}} = 30N$$



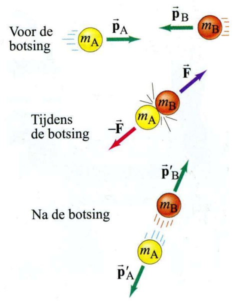
Behoud van impuls (9.2)

$$m_A \vec{\mathbf{v}}_A + m_B \vec{\mathbf{v}}_B = m_A \vec{\mathbf{v}}'_A + m_B \vec{\mathbf{v}}'_B .$$



Dit blijkt maar te gelden als de uitwendige krachten verwaarloosbaar zijn

Behoud van impuls (9.2)



$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_B}{dt}$$

$$-\vec{F} = \frac{d\vec{p}_A}{dt}$$

$$\vec{F} - \vec{F} = 0 = \frac{d\left(\vec{p}_A + \vec{p}_B\right)}{dt}$$

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \text{constant}$$

Systemen met verschillende voorwerpen

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = \sum \vec{p}_i$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum \vec{F}_i$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \Sigma\vec{\mathbf{F}}_{uitw}, \qquad (9.5)$$

waarin $\Sigma\vec{\mathbf{F}}_{uitw}$ de som is van alle uitwendige krachten die op het systeem werken. Als de netto uitwendige kracht nul is, geldt $d\vec{\mathbf{P}}/dt = 0$ $\Delta\vec{\mathbf{P}} = 0$ of $\vec{\mathbf{P}} =$ constant. We zien dus dat $\Sigma\vec{\mathbf{F}}_{uitw}$ wanneer de netto uitwendige kracht op een systeem van voorwerpen nul is, de totale impuls van het systeem constant blijft.
Dit is de **wet van behoud van impuls**. Deze kan ook geschreven worden als:

de totale impuls van een geïsoleerd systeem van voorwerpen blijft constant.

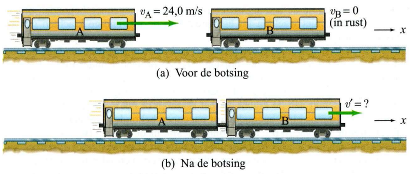
Voorbeeld 9.3 Treinwagons botsen: de impuls blijft behouden

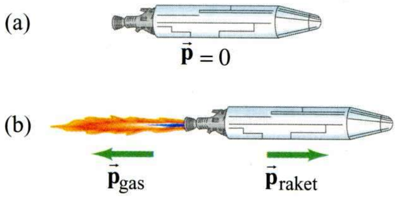
Een wagon van 10.000 kg, A, rijdt met een snelheid van 24,0 m/s tegen een identieke wagon, B, die in rust is. Als de wagons door de botsing aan elkaar vasthaken, hoe groot is hun gemeenschappelijke snelheid onmiddellijk na de botsing? Zie fig. 9.5.

$$mv_A + 0 = mv_A' + mv_B'$$

$$v_A' = v_B' = v' \Rightarrow mv_A = 2mv'$$

$$v' = \frac{1}{2}v_A = \frac{24,0\,m/s}{2} = 12,0\,m/s$$





FIGUUR 9.6 (a) Een raket, gevuld met brandstof, in rust in een bepaald referentiestelsel. (b) In hetzelfde referentiestelsel ontbrandt de raket en worden gassen met hoge snelheid aan de achterkant van de raket uitgestoten. De totale vectorimpuls, $\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{p}}_{gas} + \vec{\mathbf{p}}_{raket}$, blijft nul.

Conceptvoorbeeld 9.5 Vallen van een slede

(*a*) Een lege slede glijdt over wrijvingsloos ijs wanneer Suzanne verticaal vanuit een boom boven op de slede valt. Zal de slede versnellen, vertragen of dezelfde snelheid houden wanneer ze erop neerkomt? (*b*) Even later valt Suzanne zijdelings van de slede. Wat gebeurt er dan met de slede: versnelt hij, vertraagt hij of houdt hij dezelfde snelheid?

(a): horizontale impuls van Suzanne is nul, dus totale impuls blijft gelijk, dus snelheid verlaagt (want de totale massa neemt toe)

(b): totale impuls blijft behouden. Suzanne en de slede hebben dezelfde snelheid, dus houdt de slede dezelfde snelheid

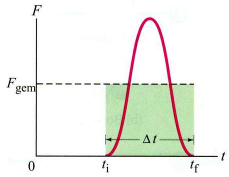
slede
sle·de
de; -n, -s

in 1864:
Slede, v. (-n)

Botsing en stoot (9.3)

Wat is een botsing?:

- Korte interactie tussen 2 lichamen
- Interactiekracht is zo sterk dat alle andere krachten tijdens de botsing verwaarloosbaar zijn
- Kort in vergelijking met de waarnemingstijd: interactie-tijdsinterval = $\Delta t = t_2 - t_1$



Kracht tijdens een botsing

- Voor beide voorwerpen tijdens een botsing geldt de 2e wet van Newton:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F}dt$$

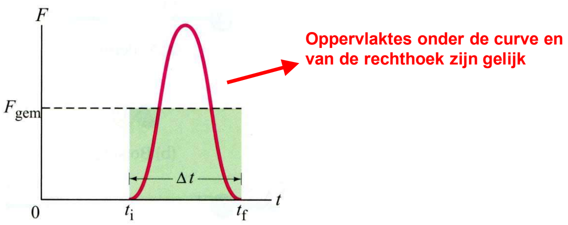
$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_e - \vec{p}_b = \int_{p_b}^{p_e} d\vec{p} = \int_{t_b}^{t_e} \vec{F}dt = \vec{J}$$

$$\vec{J} = \int_{t_b}^{t_e} \vec{F}dt$$

- **J** = **stoot** die het voorwerp ondergaat. SI-eenheid: kg.m/s (zoals impuls) = oppervlakte onder de F-t curve tijdens de botsing.

Gemiddelde kracht tijdens een botsing

$$\vec{F}_{gem}\Delta t = \int_{t_b}^{t_e} \vec{F}dt = \vec{J}$$



Behoud van energie en impuls bij botsingen (9.4)

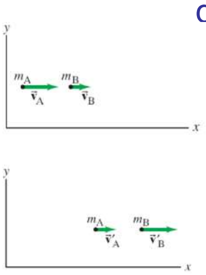
- Meestal zijn de krachten tijdens een botsing niet in detail gekend!
- Onderstelling: (stoot)krachten tijdens de botsing zijn veel groter dan de andere krachten tijdens de botsing, dus kracht tijdens de botsing ≈ nettokracht
- **De totale impuls blijft behouden als de stootkrachten veel groter zijn dan de uitwendige krachten**

Behoud van energie tijdens botsingen

- Bij **elke botsing** blijft de totale energie behouden (ook geluid, thermische energie, …)
- Bij **elastische botsingen** blijft de **mechanische** energie behouden:
  - Tijdens de botsing wordt de energie heel eventjes potentiële energie
  - Voor en na de botsing is de kinetische energie dezelfde:

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_A v'^2_A + \frac{1}{2}m_B v'^2_B$$

Elastische botsingen in één dimensie (9.5)



$$\left.\begin{array}{l} m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \\ \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_A v'^2_A + \frac{1}{2}m_B v'^2_B \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_A\left(v_A - v'_A\right) = m_B\left(v'_B - v_B\right) \\ m_A\left(v_A^2 - v'^2_A\right) = m_B\left(v'^2_B - v_B^2\right) \end{cases}$$

$$m_A\left(v_A - v'_A\right)\left(v_A + v'_A\right) = m_B\left(v'_B - v_B\right)\left(v'_B + v_B\right)$$

$$\Rightarrow v_A + v'_A = v'_B + v_B \qquad \left(v_A \neq v'_A ; v_B \neq v'_B\right)$$

$$\Rightarrow v_A - v_B = v'_B - v'_A$$

Relatieve snelheid van de deeltjes blijft dezelfde

Voorbeeld 9.7 Gelijke massa's

Biljartbal A met massa m beweegt met een snelheid v_A en botst frontaal tegen bal B met dezelfde massa. Hoe groot zijn de snelheden van de twee ballen na de botsing, als we aannemen dat de botsing elastisch is? Veronderstel (*a*) dat beide ballen in eerste instantie bewegen (v_A en v_B), (*b*) dat bal B in eerste instantie in rust is ($v_B = 0$).

$$\begin{cases} v_A + v_B = v'_A + v'_B \\ v_A - v_B = v'_B - v'_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_A = v'_B \\ v_B = v'_A \end{cases}$$

$$v_B = 0 \Rightarrow v'_A = 0$$

Voorbeeld 9.8 Ongelijke massa's, aangestoten voorwerp in rust

In een erg gebruikelijke praktische situatie botst een bewegend voorwerp (m_A) tegen een tweede voorwerp (m_B) dat in rust is ($v_B = 0$). Veronderstel dat de voorwerpen verschillende massa's hebben en dat de botsing elastisch is en in één dimensie plaatsvindt (frontaal). (*a*) Leid vergelijkingen af voor v'_B en v'_A in termen van de beginsnelheid v_A met massa m_A en de massa's m_A en m_B. (*b*) Bepaal de eindsnelheden als het bewegende voorwerp veel zwaarder is dan het aangestoten voorwerp ($m_A \gg m_B$). (*c*) Bepaal de eindsnelheden als het bewegende voorwerp veel lichter is dan het aangestoten voorwerp ($m_A \ll m_B$).

$$v_B = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_B v'_B = m_A\left(v_A - v'_A\right) \\ v_A + v'_A = v'_B \end{cases}$$

$$v'_B = v_A\left(\frac{2m_A}{m_A + m_B}\right) \quad ; \quad v'_A = v_A\left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right)$$

$$v'_B = v_A\left(\frac{2m_A}{m_A + m_B}\right) \quad ; \quad v'_A = v_A\left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right)$$

$(b): m_A >> m_B$

$\Rightarrow v'_B \approx 2v_A \quad ; \quad v'_A \approx v_A$

Kegelbal op tennisbal

$(c): m_A << m_B$

$\Rightarrow v'_B \approx 0 \quad ; \quad v'_A \approx -v_A$

Tennisbal op kegelbal

Niet-elastische botsingen (9.6)

Behoudswetten bij botsingen:

- Behoud van impuls geldt altijd
- Behoud van mechanische energie geldt enkel voor elastische botsingen
- Inelastische botsingen: geen behoud van mechanische energie (wel totale energie!)
- Limiet van inelastische botsing: **volkomen inelastische botsing**: beide voorwerpen blijven aan elkaar 'plakken'

Voorbeeld 9.10 Nog een keer: treinwagons

Bereken voor de volkomen niet-elastische botsing van de twee treinwagons in voorbeeld 9.3 hoeveel van de initiële kinetische energie omgezet wordt in thermische of andere vormen van energie.

$$v_A = 24,0\,m/s \quad ; \quad v' = 12,0\,m/s$$

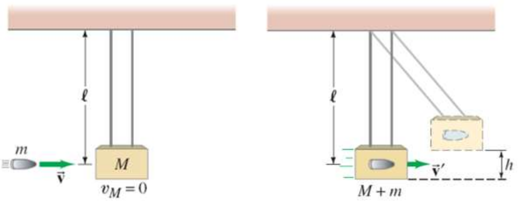
$$K_1 = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}\cdot 10^4\,kg\cdot\left(24,0\,m/s\right)^2 = 2,88\cdot 10^6\,J$$

$$K_2 = \frac{1}{2}\left(2m\right)v'^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10^4\,kg\cdot\left(12,0\,m/s\right)^2 = 1,44\cdot 10^6\,J$$

$$K_2 - K_1 = -1,44\cdot 10^6\,J$$

Voorbeeld 9.11 Ballistische slinger

De *ballistische slinger* is een apparaat dat gebruikt wordt om de snelheid van een projectiel, bijvoorbeeld een kogel, te meten. Het projectiel, met massa *m*, wordt afgevuurd in een groot blok (van hout of een ander materiaal) met massa *M*, dat opgehangen is als een slinger. (Meestal is *M* wat groter dan *m*.) Als gevolg van de botsing wordt de combinatie van het blok en de kogel opgeslingerd tot een maximale hoogte *h*, fig. 9.16. Bepaal de relatie tussen de initiële horizontale snelheid van het projectiel, *v*, en de maximale hoogte *h*.



Tijdens de 'botsing': uitwendige krachten zijn verwaarloosbaar, dus behoud van impuls:

$$mv = \left(m+M\right)v'$$

Tijdens het 'uitslingeren' werken uitwendige krachten (zwaartekracht, spankracht in het touw), dus is het behoud van impuls NIET toepasbaar. De krachten zijn conservatief, dus behoud van energie geldt WEL:

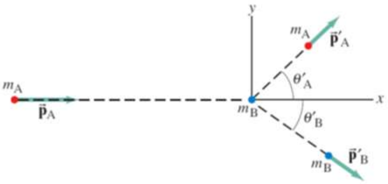
$$\frac{1}{2}\left(m+M\right)v'^2 = \left(m+M\right)gh \Rightarrow v' = \sqrt{2gh}$$

$$v = \frac{m+M}{m}v' = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$$

Botsingen in twee of drie dimensies (9.7)

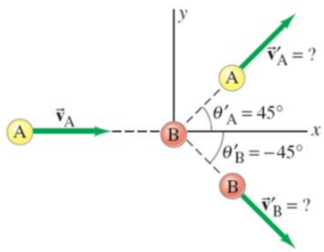
Voorbeeld: een projectiel treft niet-frontaal een stilstaand doel:

- Typisch in de nucleaire fysica
- Wetten van behoud van impuls en energie blijven geldig, nu in vectorvorm



Voorbeeld 9.12 Botsing van biljartballen in 2 dimensies

Biljartbal A heeft een snelheid $v_A = 3{,}0$ m/s in de $+x$-richting (fig. 9.19) en botst tegen biljartbal B, die in eerste instantie in rust is en dezelfde massa heeft. De twee ballen bewegen na de botsing verder in een richting die een hoek van 45° maakt met de x-as, bal A naar boven de x-as en bal B naar onder de x-as. Dat wil zeggen dat $\theta'_A = 45°$ en $\theta'_B = -45°$ in fig. 9.19. Welke snelheden hebben de twee ballen na de botsing?



Behoud van energie? Weten we niet!
Behoud van impuls is geldig:

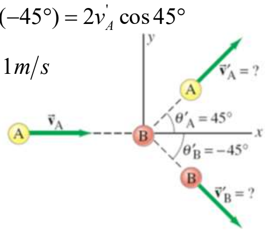
$$(x): mv_A = mv'_A \cos 45° + mv'_B \cos(-45°)$$

$$(y): 0 = mv'_A \sin 45° + mv'_B \sin(-45°)$$

$$(y) \rightarrow v'_B = -v'_A \frac{\sin 45°}{\sin(-45°)} = v'_A$$

$$(x) \rightarrow v_A = v'_A \cos 45° + v'_B \cos(-45°) = 2v'_A \cos 45°$$

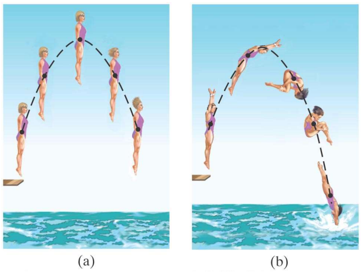
$$v'_A = \frac{v_A}{2\cos 45°} = \frac{3{,}0\,m/s}{2 \cdot 0{,}707} = 2{,}1\,m/s$$



Massamiddelpunt (MM) (9.8)

- Tot nu toe: alleen puntmassa's beschouwd = voldoende als we alleen translaties beschouwen
- **Translatie** + **rotatie** = algemene beweging
- Massamiddelpunt: het punt van een lichaam (of groep lichamen) dat dezelfde baan volgt als een puntmassa onder invloed van dezelfde kracht zou doen; dit punt kan buiten het lichaam gelegen zijn!

Voorbeeld: massamiddelpunt van een duikster



Het massamiddelpunt volgt een parabolische baan!

Algemene beweging van een voorwerp: som van de translatie van het MM en beweging (rotatie, vibratie,…) rond het MM

Massamiddelpunt (center of mass): definitie

- Systeem van 2 puntmassa's m_A en m_B op posities x_A en x_B:

$$x_{MM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{M}$$

- Systeem van n puntmassa's op een rechte lijn:

$$x_{MM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M}$$

- n puntmassa's in 3 dimensies, waarbij massa m_i de coördinaten (x_i, y_i, z_i) heeft:

$$x_{MM} = \frac{\sum m_i x_i}{M} \quad ; \quad y_{MM} = \frac{\sum m_i y_i}{M} \quad ; \quad z_{MM} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

- Massamiddelpunt van n punten in vectorvorm:

$$\vec{r}_i = x_i \vec{e}_x + y_i \vec{e}_y + z_i \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_{MM} = x_{MM} \vec{e}_x + y_{MM} \vec{e}_y + z_{MM} \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_{MM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

- Meest voorkomende geval: massa als continuüm, met een oneindig aantal oneindig kleine puntmassa's:

$$x_{MM} = \frac{1}{M}\int x\,dm \quad ; \quad y_{MM} = \frac{1}{M}\int y\,dm \quad ; \quad z_{MM} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

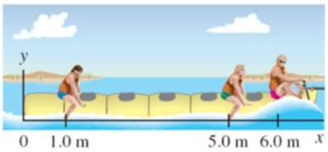
$$\vec{r}_{MM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

Voorbeeld 9.14 MM van drie mannen op een vlot

Drie mannen met ongeveer dezelfde massa m drijven op een lichtgewicht (opblaasbaar) vlot langs de x-as op de posities $x_A = 1{,}0$ m, $x_B = 5{,}0$ m en $x_C = 6{,}0$ m, gemeten vanaf de linkerkant van het vlot op de manier zoals is weergegeven in fig. 9.24. Bepaal de positie van het MM. Verwaarloos de massa van het vlot.

$$x_{MM} = \frac{m x_A + m x_B + m x_C}{m + m + m} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$= \frac{1{,}0m + 5{,}0m + 6{,}0m}{3} = 4{,}0m$$



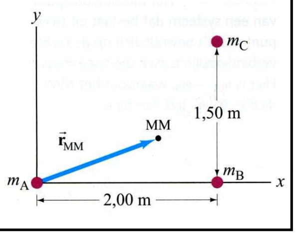
Voorbeeld 9.15 Drie puntmassa's in twee dimensies

Drie puntmassa's, elk met massa 2,50 kg, bevinden zich op de hoeken van een rechthoekige driehoek met zijden van 2,00 m en 1,50 m lang, op de manier zoals is weergegeven in fig. 9.25. Bepaal de plaats van het massamiddelpunt.

$$\vec{r}_{MM} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{M} = \frac{\left(0\vec{e}_x + 0\vec{e}_y\right)\cdot m_A + 2,00\vec{e}_x \cdot m_B + \left(2,00\vec{e}_x + 1,50\vec{e}_y\right) m_C}{m_A + m_B + m_C}$$

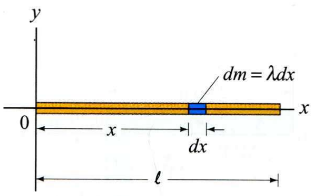
$$= \frac{\left(4,00\vec{e}_x + 1,50\vec{e}_y\right) m}{3m} = \frac{4}{3}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y$$

$$\begin{cases} x_{MM} = 1,33m \\ y_{MM} = 0,50m \end{cases}$$



Voorbeeld 9.16 MM van een dunne stang

(*a*) Toon aan dat het MM van een eenvormige dunne stang met lengte ℓ en massa M zich in het middelpunt van de stang bevindt. (*b*) Bereken het MM van de stang, als de lineaire soortelijke massa λ (de massa per eenheid van lengte) lineair varieert van $\lambda = \lambda_0$ in het linker uiteinde tot de dubbele waarde daarvan, $\lambda = 2\lambda_0$ aan het rechter uiteinde.

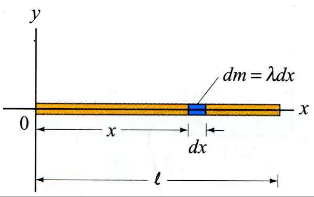


$(a): \lambda = cte.$

$$\lambda = \frac{M}{\ell} = \frac{dm}{dx} \rightarrow dm = \lambda dx$$

$$x_{MM} = \frac{1}{M}\int_{x=0}^{\ell} x\,dm = \frac{1}{M}\int_{x=0}^{\ell} \lambda x\,dx = \frac{\lambda}{M}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\ell}$$

$$= \frac{\lambda}{M}\frac{\ell^2}{2} = \frac{\ell}{2}$$



$$(b): \lambda = \lambda_0 (1+\alpha x)$$

$$x = 0 \rightarrow \lambda = \lambda_0$$

$$x = \ell \rightarrow \lambda = 2\lambda_0 \rightarrow \alpha = 1/\ell$$

$$\lambda = \frac{dm}{dx}$$

$$x_{MM} = \frac{1}{M}\int_{x=0}^{\ell} x\,dm = \frac{1}{M}\int_{x=0}^{\ell} \lambda x\,dx = \frac{1}{M}\int_{x=0}^{\ell} \lambda_0 (1+\alpha x) x\,dx$$

$$= \frac{\lambda_0}{M}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\ell} + \frac{\lambda_0 \alpha}{M}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\ell} = \frac{\lambda_0}{M}\frac{\ell^2}{2} + \frac{\lambda_0 \alpha}{M}\frac{\ell^3}{3}$$

$$= \frac{\lambda_0}{M}\left(\frac{\ell^2}{2} + \frac{\ell^2}{3}\right) = \frac{5\lambda_0}{6M}\ell^2$$

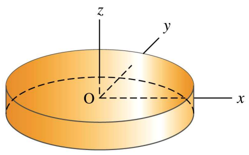
$$M = \int_{x=0}^{\ell} dm = \int_{x=0}^{\ell} \lambda\,dx = \int_{x=0}^{\ell} \lambda_0\left(1+\frac{x}{\ell}\right)dx$$

$$= \lambda_0 \ell + \frac{\lambda_0}{\ell}\frac{\ell^2}{2} = \frac{3}{2}\lambda_0 \ell$$

$$x_{MM} = \frac{5\lambda_0}{6M}\ell^2 = \frac{5\lambda_0}{6}\cdot\frac{2}{3\lambda_0 \ell}\ell^2 = \frac{5}{9}\ell$$

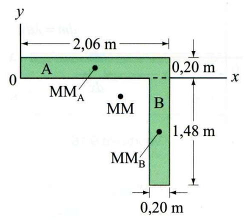
Massamiddelpunt voor symmetrische objecten

Kiezen we bij de berekening van het massamiddelpunt van een cilinder de oorsprong van het assenstelsel in het "midden", dan vallen bij de sommatie de bijdragen van alle tegenover elkaar gelegen punten weg, dus: massamiddelpunt = symmetriecentrum **ALS** de massa homogeen verdeeld is



Voorbeeld 9.17 MM van een L-vormig vlak voorwerp

Bepaal het MM van de eenvormige dunne L-vormige beugel in fig. 9.29.



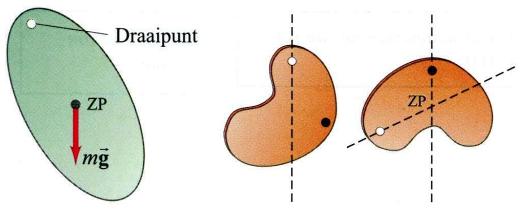
$$x_{MM-A} = 1,03m$$
$$y_{MM-A} = 0,10m$$
$$x_{MM-B} = 1,96m$$
$$y_{MM-B} = -0,74m$$
$$M_A/M = 2,06/(2,06+1,48) = 0,582$$
$$M_B/M = 1,48/(2,06+1,48) = 0,418$$
$$x_{MM} = \frac{x_{MM-A}M_A + x_{MM-B}M_B}{M} = 1,03m \cdot 0,582 + 1,96m \cdot 0,418 = 1,42m$$
$$y_{MM} = \frac{y_{MM-A}M_A + y_{MM-B}M_B}{M} = 0,10m \cdot 0,582 - 0,74m \cdot 0,418 = -0,25m$$

Massamiddelpunt en zwaartepunt

Zwaartepunt = punt waar de zwaartekracht lijkt op in te werken, en we als aangrijpingspunt van de zwaartekracht kunnen gebruiken

Zwaartepunt (ZP) en massamiddelpunt (MM) vallen samen, behalve voor zeer grote objecten (dan is de zwaartekracht niet dezelfde op verschillende delen van het voorwerp)

Empirische (experimentele) methode voor het bepalen van het zwaartepunt



Massamiddelpunt en translatiebeweging (9.9)

Beweging van n puntmassa's met totale massa M:

$$\vec{r}_{MM} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$$
$$\Rightarrow M\vec{r}_{MM} = \sum m_i \vec{r}_i$$
$$\Rightarrow M\frac{d\vec{r}_{MM}}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$
$$M\vec{v}_{MM} = \sum m_i \vec{v}_i$$
$$\Rightarrow M\frac{d\vec{v}_{MM}}{dt} = \sum m_i \vec{a}_i$$
$$M\vec{a}_{MM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i$$

$$M\vec{a}_{MM} = \sum \vec{F}_i$$

De som van alle krachten die op het systeem werken is dus gelijk aan de totale massa van het systeem maal de versnelling van het massamiddelpunt ervan.

$$\boxed{M\vec{a}_{MM} = \sum \vec{F}_{uitw}}$$

= tweede wet van Newton voor een verzameling puntmassa's (of voorwerpen)

Inwendige / uitwendige krachten

2 types krachten die op de puntmassa's van een systeem kunnen inwerken:

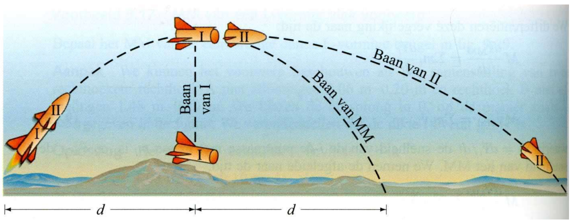
- **Uitwendige krachten**, uitgeoefend door objecten buiten het systeem (bvb zwaartekracht)
- **Inwendige krachten**, die elementen binnen het systeem op elkaar uitoefenen (bvb elektrische krachten, onderlinge zwaartekracht, veren, …). De som van de inwendige krachten is altijd nul (3e wet van Newton!), dus:

$$M\vec{a}_{MM} = \vec{F}_{uitw}$$

het massamiddelpunt van een systeem van puntmassa's (of voorwerpen) met totale massa M beweegt als één puntmassa met massa M wanneer daarop dezelfde netto uitwendige kracht uitgeoefend wordt.

Conceptvoorbeeld 9.18 Een tweetrapsraket

Een raket wordt afgevuurd in de lucht op de manier zoals is weergegeven in fig. 9.32. Op het moment dat de raket zich op het hoogste punt van zijn baan bevindt op een horizontale afstand d vanaf het lanceerpunt, wordt de raket met een explosie in twee delen met gelijke massa gesplitst. Deel I komt door de explosie tot stilstand en valt verticaal terug naar de aarde. Waar komt deel II neer? Veronderstel dat $\vec{g}$ = constant.



$$M\vec{a}_{MM} = \vec{F}_{uitw}$$

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = \sum \vec{p}_i$$

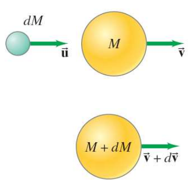
$$M\vec{r}_{MM} = \sum m_i\vec{r}_i \Rightarrow M\vec{v}_{MM} = \sum m_i\vec{v}_i = \vec{P}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{MM}}{dt} = M\vec{a}_{MM} = \vec{F}_{uitw}$$

Dus geldt dat *de totale impuls van een systeem van puntmassa's gelijk is aan het product van de totale massa M en de snelheid van het massamiddelpunt van het systeem.* Of, *de impuls van een ruimtelijk voorwerp is het product van de massa van dat voorwerp en de snelheid van het MM ervan.*

Systemen met variabele massa (9.10)

Onderstel een 'botsing' van massa dM (snelheid u) en massa M (snelheid v):



$$d\vec{P} = (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) - (M\vec{v} + \vec{u}dM)$$
$$= Md\vec{v} + \vec{v}dM + \cancel{dMd\vec{v}} - \vec{u}dM$$

$$\sum \vec{F}_{uitw} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{Md\vec{v} + \vec{v}dM - \vec{u}dM}{dt} = M\frac{d\vec{v}}{dt} - (\vec{u} - \vec{v})\frac{dM}{dt}$$

$$\vec{v}_{rel} = \vec{u} - \vec{v}$$

$$\Rightarrow M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{uitw} + \vec{v}_{rel}\frac{dM}{dt}$$

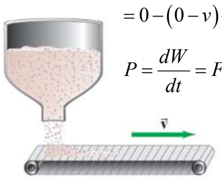
Voorbeeld 9.19 Transportband

Je moet een transportsysteem ontwerpen voor een grindgroeve. Vanuit een hopper wordt het grind met een snelheid van 75,0 kg/s op een transportband gestort die beweegt met een constante snelheid v = 2,20 m/s (fig. 9.34). (*a*) Bepaal de extra kracht (bovenop de inwendige wrijving) die nodig is om de transportband zijn snelheid te laten behouden terwijl er grind op gestort wordt. (*b*) Hoe groot moet het uitgangsvermogen van de motor zijn die de transportband aandrijft?

$$F_{uitw} = M\frac{dv}{dt} - (u-v)\frac{dM}{dt}$$

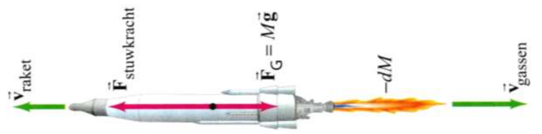
$$= 0-(0-v)\frac{dM}{dt} = v\frac{dM}{dt} = 2{,}20\,m/s \cdot 75{,}0\,kg/s = 165N$$

$$P = \frac{dW}{dt} = F_{uitw}\cdot v = 165N \cdot 2{,}20\,m/s = 363W$$



Voorbeeld 9.20 Voortstuwing van een raket

Een volledig met brandstof gevulde raket heeft een massa van 21.000 kg, waarvan 15.000 kg brandstof is. De verbrande brandstof wordt met 190 kg/s aan de achterzijde van de raket uitgestoten met een snelheid van 2800 m/s ten opzichte van de raket. Veronderstel dat de raket verticaal gelanceerd wordt (fig. 9.35). Bereken dan (*a*) de stuwkracht van de raket; (*b*) de nettokracht op de raket tijdens de lancering en net voordat alle brandstof opgebruikt is; (*c*) de snelheid van de raket als functie van de tijd en (*d*) de eindsnelheid nadat alle brandstof verbruikt is. Verwaarloos de luchtweerstand en veronderstel dat de valversnelling constant is en g = 9,80 m/s^2 bedraagt.



$$(a): F_{stuw} = v_{rel}\frac{dM}{dt} = \left(-2800\frac{m}{s}\right)\left(-190\frac{kg}{s}\right) = 5{,}3\cdot10^5 N$$

$$(b): F_{uitw}(start) = M_{start}g = 2{,}1\cdot10^4 kg \cdot 9{,}80\frac{m}{s^2} = 2{,}1\cdot10^5 N$$

$$F_{net}(start) = F_{stuw} - F_{uitw}(start) = 3{,}2\cdot10^5 N$$

$$F_{uitw}(einde) = M_{einde}g = 6{,}0\cdot10^3 kg\cdot 9{,}80\frac{m}{s^2} = 5{,}9\cdot10^4 N$$

$$F_{net}(einde) = F_{stuw} - F_{uitw}(einde) = 4{,}7\cdot10^5 N$$

$$(c): M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{uitw} + \vec{v}_{rel}\frac{dM}{dt}$$

$$\Rightarrow dv = \frac{F_{uitw}}{M}dt + v_{rel}\frac{dM}{M}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = -g\int_{0}^{t} dt + v_{rel}\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M} \Rightarrow v - v_0 = -gt + v_{rel}\ln\frac{M}{M_0}$$

$$t = \frac{1{,}50\cdot 10^4 kg}{190\,kg/s} = 79{,}0s$$

Stel $v_0 = 0 \Rightarrow v = -9{,}80\frac{m}{s^2}\cdot 79{,}0s + \left(-2800\frac{m}{s}\right)\cdot\ln\frac{6000kg}{21000kg} = 2730\frac{m}{s}$