

MECHANICA, TRILLINGEN EN GOLVEN

Prof. dr. Johan D'heer

Bachelor of Science in de biowetenschappen
Academiejaar 2019 – 2020

Hoofdstuk 2+3

Essential University Physics

Richard Wolfson
3rd Edition

Beweging in Eén, Twee en Drie Dimensies

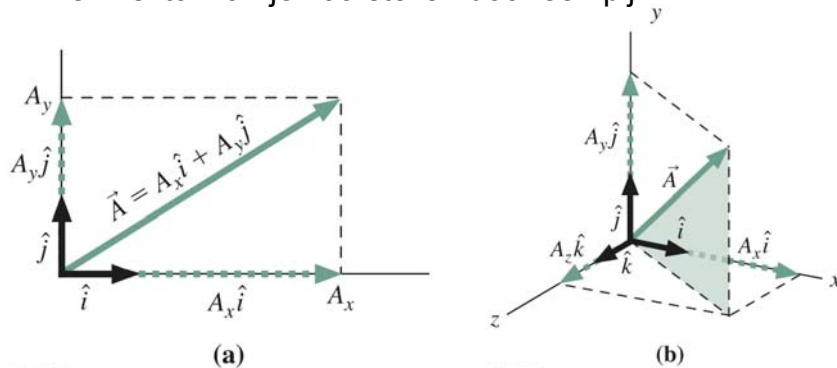
Motion in One, Two and Three Dimensions

© Johan D'heer

1

3.1 Vektoren

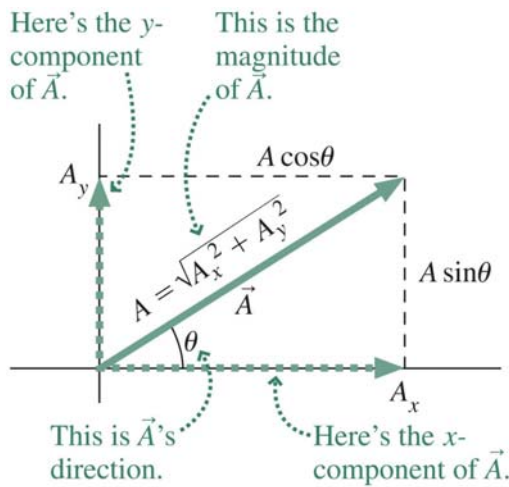
- Een **vektor** is een grootheid die een **grootte** en een **richting** heeft.
 - In twee dimensies heb je twee getallen nodig om een vektor te karakteriseren.
 - In drie dimensies heb je drie getallen nodig.
 - Een vektor kan je voorstellen door een pijl.



© Johan D'heer

2

3.1 Vektoren



$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

$$A_x = A \cos \theta$$

$$A_y = A \sin \theta$$

$$\text{tg} \theta = \frac{A_y}{A_x}$$

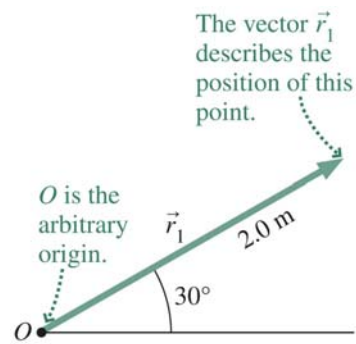
Merk op:
Componenten hebben een teken!

© Johan D'heer

3

Vektoren

- **Plaats (position)** is een vektorieële grootheid.
 - De plaats van een voorwerp kan je aangeven met een vektor (**plaatsvektor**).
 - Vb.: \vec{r}_1 beschrijft een plaats op 2,0 m van de oorsprong en met een hoek van 30° met de as.



Merk op:

De plaats van een voorwerp wordt gegeven t.o.v. een zelfgekozen oorsprong en assenkruis.

© Johan D'heer

4

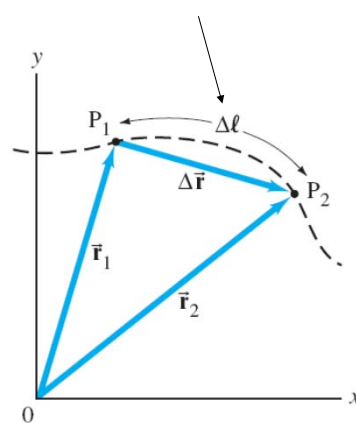
Vektoren

- Het eindpunt van de plaatsvektor beschrijft de baan van het voorwerp.

Verplaatsing (displacement) – Afgelegde afstand

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Verplaatsing is een vektor.
Afgelegde afstand is een getal.



© Johan D'heer

5

3.2 Snelheidsvektor en Versnellingsvektor

- **Snelheid (velocity)** is het tempo van de positieverandering.
(hoe “snel” verandert de positie van een voorwerp)

- De gemiddelde snelheid over een tijdsinterval Δt :

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

- Ogenblikkelijke snelheid (of kortweg **snelheid**):

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Snelheid is een vektor en heeft dus richting, zin en grootte!

© Johan D'heer

6

LET OP!

- Als we in het dagelijks taalgebruik over gemiddelde snelheid praten, dan bedoelen we eigenlijk de average speed:

$$\bar{v}_{av.sp.} = \frac{\text{totale afgelegde afstand}}{\Delta t}$$

- Als men in vraagstukken of problemen naar de gemiddelde snelheid zal vragen in de betekenis van average speed, zal daar telkens tussen haakjes bijstaan (average speed), ofwel $v_{av.sp.}$

3.2 Snelheidsvektor en Versnellingsvektor

Nederlands:

Snelheid is de snelheidsvektor of de grootte

Engels:

Velocity = snelheidsvektor

Speed = grootte van de snelheidsvektor

Fysica:

snelheid = snelheidsvektor!

3.2 Snelheidsvektor en Versnellingsvektor

- **Versnelling** is het tempo van snelheidsverandering.
(hoe “snel” verandert de snelheid van een voorwerp)

- De gemiddelde versnelling over een tijdsinterval Δt :

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

- Ogenblikkelijke versnelling (of kortweg **versnelling**):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

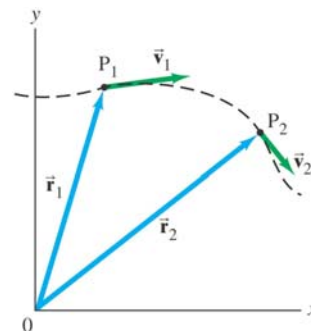
Versnelling is een vektor en heeft dus richting, zin en grootte!

© Johan D'heer

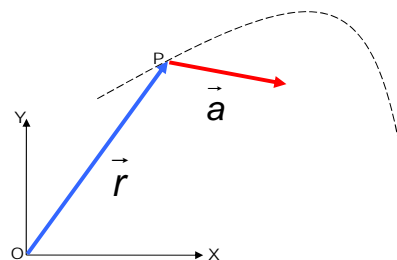
9

Snelheidsvektor en Versnellingsvektor

- Snelheidsvektor is altijd rakend aan de baan van het voorwerp:



- Versnellingsvektor is altijd gericht naar de holle kant van de baan:



© Johan D'heer

10

Snelheidsvektor en Versnellingsvektor

- Eenheid: m.s⁻¹

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \\ &= \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z\end{aligned}$$

\vec{v}_x = snelheid volgens X-as

\vec{v}_y = snelheid volgens Y-as

\vec{v}_z = snelheid volgens Z-as

- Eenheid: m.s⁻²

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \\ &= \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z\end{aligned}$$

\vec{a}_x = versnelling volgens X-as

\vec{a}_y = versnelling volgens Y-as

\vec{a}_z = versnelling volgens Z-as

Vraagstuk 21 hfdst. 3

- Een voorwerp beweegt in tegenwijzerzin op een cirkel tegen 18 m/s. De plaatsvektor maakt een hoek van 220° met de x-as.
Bereken de x- en y-componenten van de snelheid.

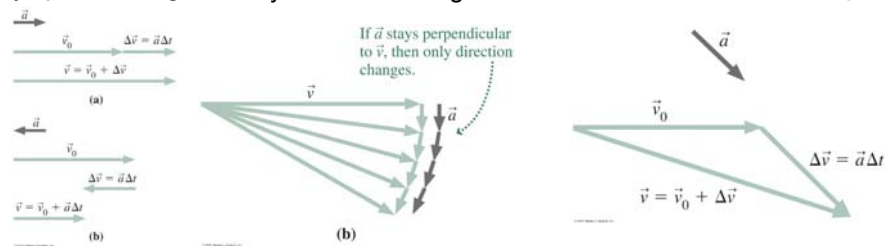
Verband Snelheid en Versnelling

- Een versnelling \vec{a} gedurende een tijd Δt produceert een snelheidsverandering $\Delta\vec{v} = \vec{a}\Delta t$.
 - De nieuwe snelheid wordt dan:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\Delta t$$

- De nieuwe snelheid hangt af van de grootte van de versnelling en de richting van de versnelling:

\vec{a} and \vec{v} colinear: only speed changes \vec{a} and \vec{v} perpendicular: only direction changes In general: both speed and direction change

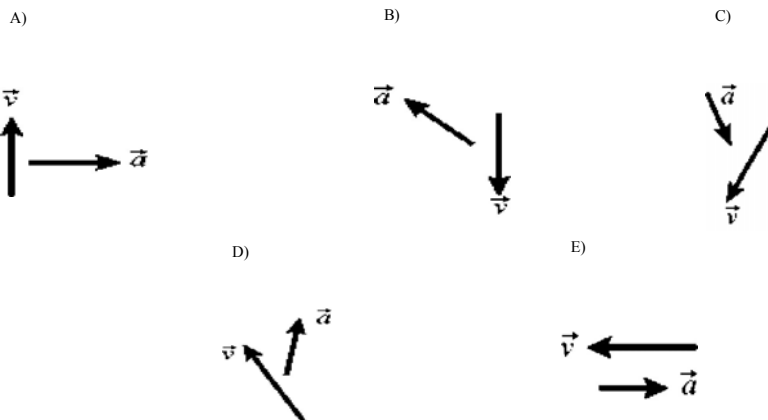


© Johan D'heer

13

Conceptvraag

Gegeven zijn de snelheid en versnelling van een bewegende persoon. In welk geval vertraagt de persoon en wijkt af naar rechts (vanuit het standpunt van de persoon)?



© Johan D'heer

14

Vraagstuk 27 hfdst. 3

- Een voorwerp beweegt in de x-richting tegen 1,1 m/s wanneer het een versnelling $\vec{a} = 0,52\hat{j} \text{ ms}^{-2}$ ondervindt.
Bereken de snelheid na 5,2 s.

Bijzonder Geval: Beweging in 1 dimensie

- De plaats van een voorwerp wordt gekarakteriseerd door 1 getal, bvb. de x-coördinaat.

$$\vec{r} = x\hat{i}$$

- De verplaatsing is $\Delta x = x_2 - x_1$
- De snelheidsvektor:

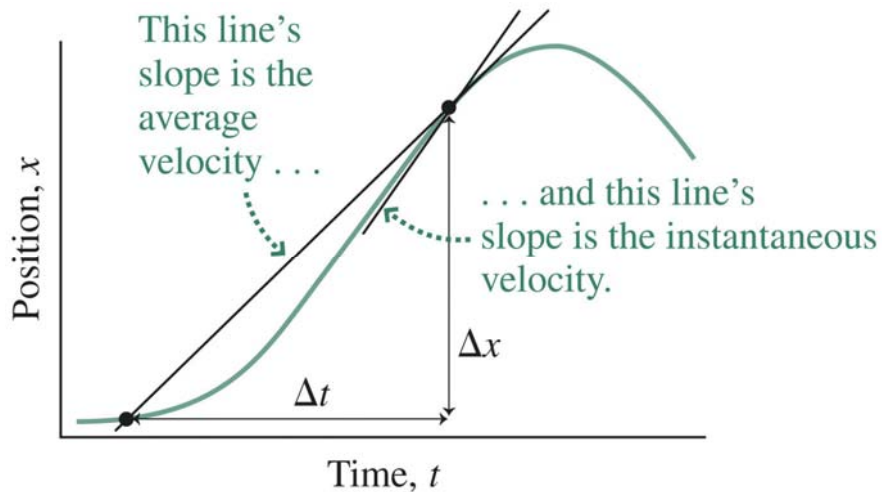
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} = v\hat{i} \Rightarrow v = \frac{dx}{dt}$$

- De versnellingsvektor:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{i} = a\hat{i} \Rightarrow a = \frac{dv}{dt}$$

Bijzonder Geval: Beweging in 1 dimensie

- Snelheid is de rico van de plaats-tijd grafiek.

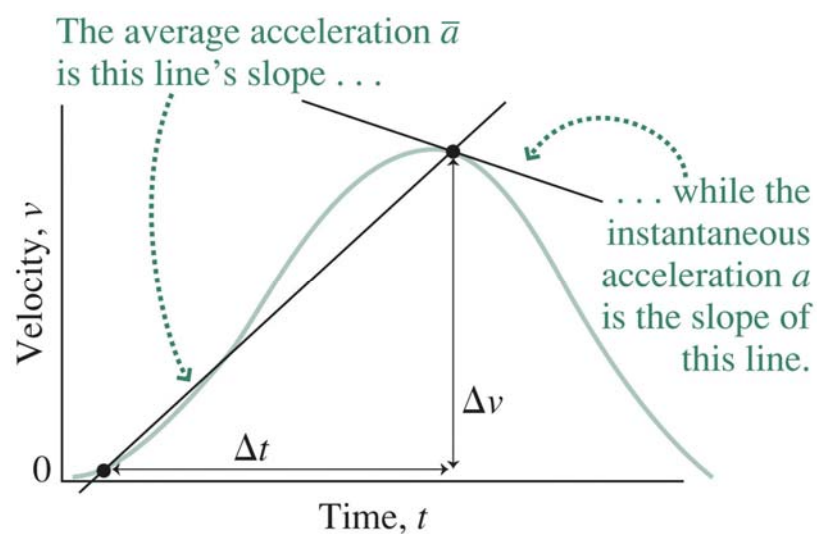


© Johan D'heer

17

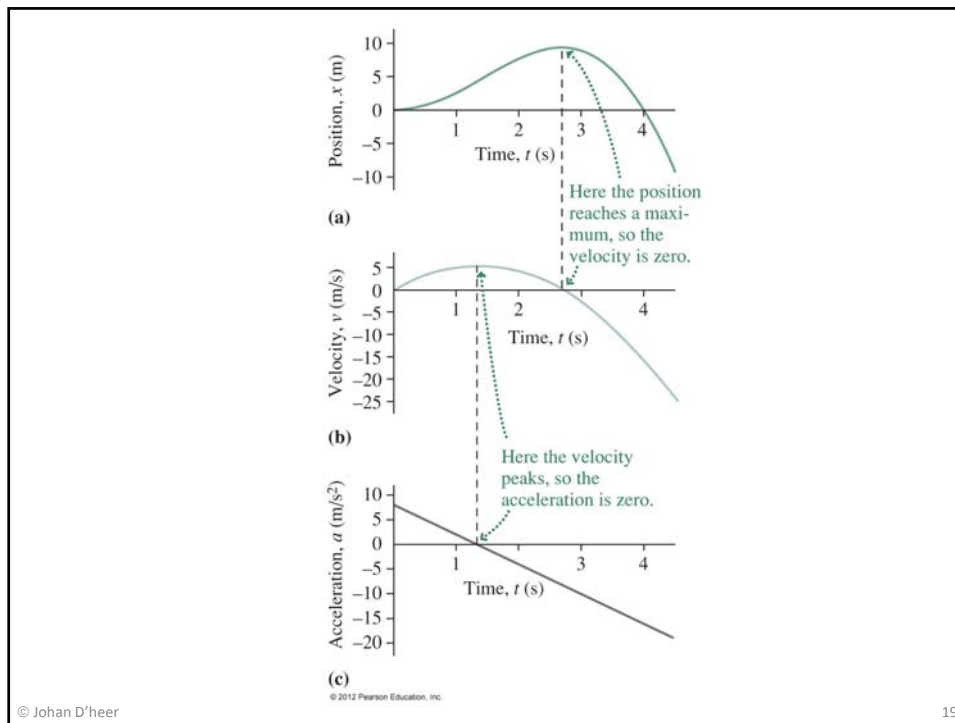
Bijzonder Geval: Beweging in 1 dimensie

- Versnelling is de rico van de snelheid-tijd grafiek.



© Johan D'heer

18



Bijzonder Geval: Beweging in 1 dimensie

- In 1 dimensie zorgt een versnelling enkel voor de verandering van grootte en/of zin van de snelheid.

$$v = v_0 + a\Delta t$$

- Hebben v_0 en a dezelfde zin (zelfde teken), dan hebben we een versnelde beweging: snelheid neemt toe.
- Hebben v_0 en a een tegengestelde zin (verschillend teken), dan hebben we een vertraagde beweging: snelheid neemt af.

Conceptvraag

Een auto rijdt in westelijke richting (de neg. x-richting) en begint te vertragen bij het naderen van een verkeerslicht. Welke bewering is correct?

- a) Zowel de versnelling en de snelheid zijn positief.
- b) Zowel de versnelling en de snelheid zijn negatief.
- c) De versnelling is negatief maar de snelheid is positief.
- d) De versnelling is positief maar de snelheid is negatief.

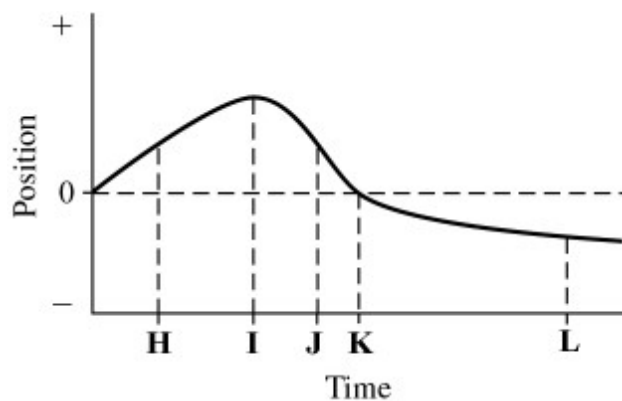
© Johan D'heer

21

Conceptvraag

The graph in the figure shows the position of an object as a function of time. At which moments shown (H, I, etc.) is the speed of the object

- (a) the greatest?
- (b) the smallest?

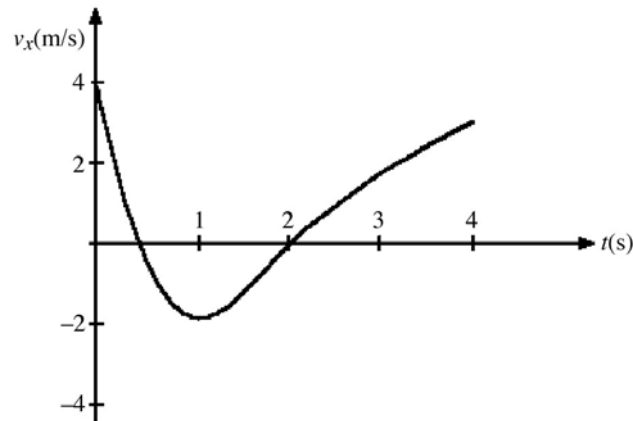


© Johan D'heer

22

Conceptvraag

The figure represents the velocity of a particle as it travels along the x -axis. At what value (or values) of t is the instantaneous acceleration equal to zero?



© Johan D'heer

23

Vraagstuk

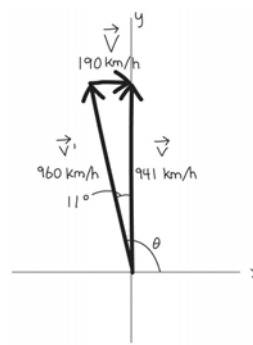
- De positie van een voorwerp wordt gegeven door $x = bt^3$, met x in meters, t in seconden, en $b = 1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-3}$. Bereken na 2,5 s:
 - a) De snelheid.
 - b) De versnelling.
 - c) De gemiddelde snelheid.
 - d) De gemiddelde versnelling.

3.3 Relatieve Beweging

- Een voorwerp beweegt met snelheid \vec{v}' t.o.v. een referentiestelsel.
- Dat referentiestelsel beweegt met snelheid \vec{V} t.o.v. een tweede referentiestelsel.
- De snelheid van het voorwerp t.o.v. het tweede referentiestelsel is dan $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$.

- Example:

- A jetliner flies at 960 km/h relative to the air, heading northward. There's a wind blowing eastward at 190 km/h. In what direction should the plane fly?
- The vector diagram identifies the quantities in the equation, and shows that the angle is 11° .



© Johan D'heer

25

Relatieve Beweging

TIP

- Snelheid vliegtuig t.o.v. lucht: \vec{V}_{VL}
- Snelheid lucht t.o.v. grond (= windsnelheid): \vec{V}_{LG}
- De snelheid van \vec{V}_{VG} het vliegtuig t.o.v. de grond is dan:

$$\vec{V}_{VG} = \vec{V}_{VL} + \vec{V}_{LG}$$

© Johan D'heer

26

Vraagstuk 28 hfdst. 3

- Je bent een piloot die begint aan een vlucht van 1600 km. De snelheid van je vliegtuig is 1200 km/u en de controletoren zegt dat je 15° naar het zuidwesten moet sturen om een koers naar het zuiden te hebben. Als de totale vluchtduur 110 min. duurt, wat is dan de windsnelheid?

\vec{V} constant: rechtlijnige beweging.

(waarom?)

\vec{V} niet constant: rechtlijnige of kromlijnige beweging.

\vec{a} ?

Constant:

- zowel grootte en richting veranderen niet.

Niet constant:

- Grootte verandert.
- Richting verandert.
- Grootte en richting verandert.

3.4 Constante Versnelling

- Als de versnelling constant is:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

- Projectie op X-, Y- en Z-as geeft aparte scalaire vgl.
- Vb., in twee dimensies, worden de x- and y-componenten van de plaatsvektor \vec{r} en de snelheidsvektor \vec{v} op elk ogenblik t gegeven door:

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \text{en} \quad v_x = v_{x0} + a_x t$$

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad \text{en} \quad v_y = v_{y0} + a_y t$$

3.4 Constante Versnelling

- In één dimensie vindt men:

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

met x_0 en v_0 de beginwaarden op $t = 0$, en x en v zijn de waarden op een willekeurig tijdstip t .

- *Opm.:*
uit voorgaande formules
volgt:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Let op:

Formules enkel geldig bij constante versnelling!

Vraagstuk 32 hfdst. 2

Starting from rest, a car accelerates at a constant rate, reaching 88 km/h in 12 s.
Find

- (a) its acceleration
- (b) how far it goes in this time.

Vraagstuk 62 hfdst. 2

- The maximum braking acceleration of a car on a dry road is about 8 m/s^2 . If two cars move head-on toward each other at 88 km/h, and their drivers brake when they're 85 m apart, will they collide?
If so, at what relative speed? If not, how far apart will they be when they stop?
(rel. speed = grootte van $v_2 - v_1$)

Plot distance versus time for both cars on a single graph.

Voorbeelden van bewegingen met constante versnelling zijn:

- Valbeweging (zie 2.5)
- Projectielbeweging (zie 3.5)

Versnelling is telkens **valversnelling** \vec{g}

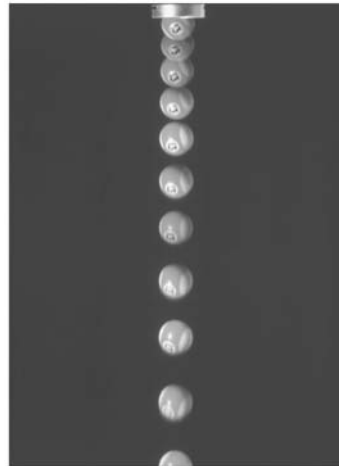
- Vertikaal naar beneden gericht.
- Grootte afhankelijk van plaats op aarde
- Gemiddelde waarde $9,8 \text{ m/s}^2$.

2.5 Valbeweging

- De valversnelling is onafhankelijk van de massa van het vallend voorwerp.
- Gevolg: in afwezigheid van wrijving door bvb. lucht zullen alle voorwerpen even snel vallen!
- De vgl. in een coördinaten systeem met y-as naar boven gericht, worden dan:

$$v = v_0 - gt$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$



This strobe photo of a falling ball shows increasing spacing resulting from the acceleration of gravity.

Conceptvraag

A ball is thrown directly upward and experiences no air resistance. Which one of the following statements about its motion is correct?

- a) The acceleration of the ball is upward while it is traveling up and downward while it is traveling down.
- b) The acceleration of the ball is downward while it is traveling up and upward while it is traveling down.
- c) The acceleration is downward during the entire time the ball is in the air.
- d) The acceleration of the ball is downward while it is traveling up and downward while it is traveling down but is zero at the highest point when the ball stops.

© Johan D'heer

35

Vraagstuk 25 hfdst. 2

- An egg drops from a second-story window, taking 1.12 s to fall and reaching 11.0 m/s just before hitting the ground. On contact, the egg stops completely in 0.133 s. Calculate the average magnitudes of its acceleration while falling and while stopping.

3.5 Projectiel Beweging (schuine worp)

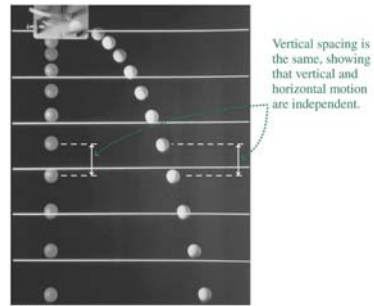
- Beweging onder invloed van zwaartekracht nabij aardoppervlak gebeurt met **constante versnelling** \vec{g}
- $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, vertikaal naar beneden gericht.
 - Deze beweging noemt men de **projectiel beweging**.
 - Bewegingsvergelijkingen (y as vertikaal naar boven):
 - Horizontale en verticale bewegingen zijn onafhankelijk van elkaar:

$$v_x = v_{x0}$$

$$x = x_0 + v_{x0}t$$

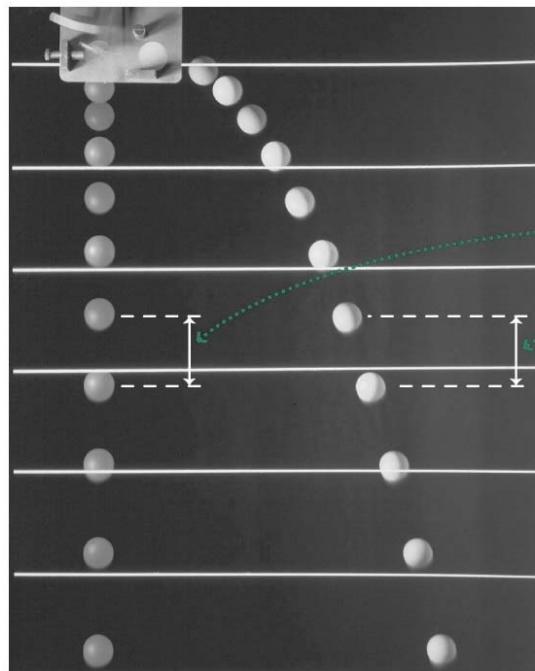
$$v_y = v_{y0} - gt$$

$$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$



© Johan D'heer

37

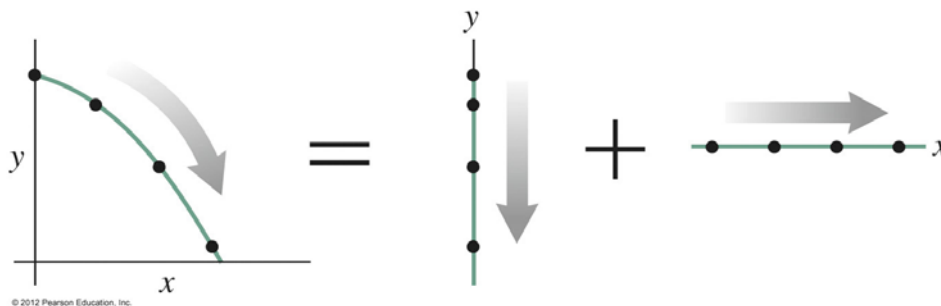


Vertical spacing is the same, showing that vertical and horizontal motion are independent.

© 2012 Pearson Education, Inc.

Projectiel Beweging (schuine worp)

- Beweging is combinatie van:
 een **horizontale** beweging met **constante snelheid**
 en
 een **vertikale** beweging (valbeweging) met
constante versnelling.



© 2012 Pearson Education, Inc.

© Johan D'heer

39

Conceptvraag

Alice and Tom dive from an overhang into the lake below. Tom simply drops straight down from the edge, but Alice takes a running start and jumps with an initial horizontal velocity of 25 m/s. Neither person experiences any significant air resistance. Compare the time it takes each of them to reach the lake below.

- Alice reaches the surface of the lake first.
- Tom reaches the surface of the lake first.
- Alice and Tom will reach the surface of the lake at the same time.

© Johan D'heer

40

Conceptvraag

A pilot drops a package from a plane flying horizontally at a constant speed. Neglecting air resistance, when the package hits the ground the horizontal location of the plane will

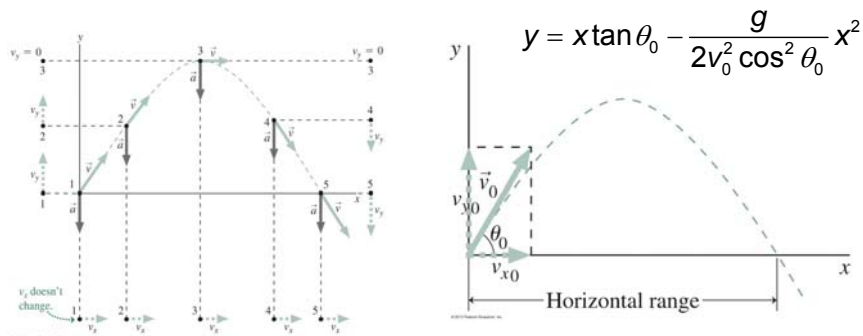
- A) be behind the package.
- B) be over the package.
- C) be in front of the package.
- D) depend on the speed of the plane when the package was released.

Vraagstuk 37 hfdst. 3

- Inktdruppels in een inkjetprinter verlaten de printkop met een horizontale snelheid van 12 m/s. De horizontale afstand tot het papier bedraagt 1,0 mm.
Over welke afstand vallen ze voor ze op het papier terechtkomen?

Projectiel Banen

- De baan (trajectory) van een voorwerp dat een projectiel beweging uitvoert is een parabool, tenzij het voorwerp geen horizontale bewegingscomponent heeft.
 - Horizontaal: beweging met constante snelheid.
 - Vertikaal: valbeweging.
 - Vergelijking baan (door eliminatie van t uit bewegingsvgn.):



© Johan D'heer

43

Vraagstuk 63 hfdst. 3

- Je staat 3,0 m voor een gebouw en je wilt een pakje door een raam gooien. De onderkant van het raam bevindt zich 4,2 m boven de grond. Als het pakje je hand verlaat op schouderhoogte (= 1,5 m boven de grond), wat moet dan de beginsnelheid zijn van het pakje opdat het net door het raam zou vliegen? (geef de grootte en de hoek met de horizontale)

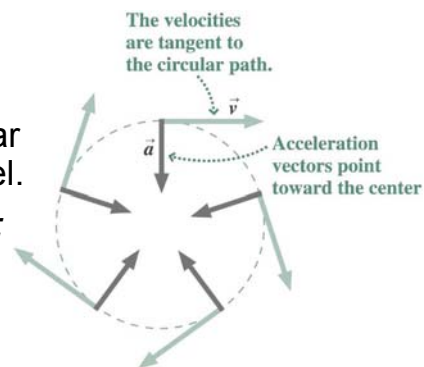
3.6. Niet-constante Versnelling: Cirkelbeweging, Kromlijnige Beweging

- *Eénparig cirkelvormige beweging:*

Wanneer een voorwerp beweegt in een cirkelvormige baan met straal r met constante 'speed' v , heeft de versnelling een grootte

$$a = \frac{v^2}{r}$$

- Versnellingsvektor wijst naar het middelpunt van de cirkel.
- Versnelling is *niet constant*: de richting verandert voortdurend.



© Johan D'heer

45

- *niet-éénparig cirkelvormige beweging:*

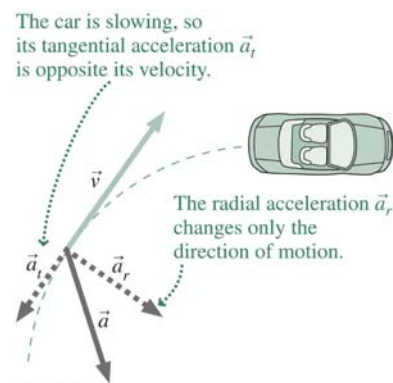
Zowel richting en de grootte van de snelheid kunnen veranderen.

- De versnelling heeft een radiale en een tangentiële component:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$$

- \vec{a}_r staat loodrecht op \vec{v}
 \vec{a}_t is evenwijdig met \vec{v}

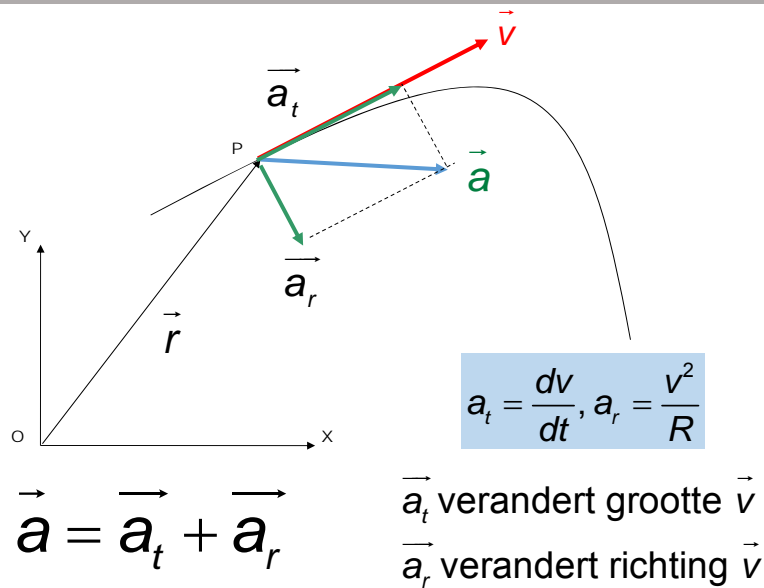
- De figuur toont een auto die remt bij het maken van een bocht.



© Johan D'heer

46

Aanvulling: Kromlijngige Beweging

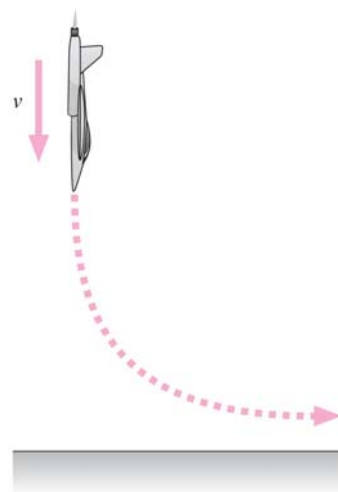


© Johan D'heer

47

Vraagstuk 75 hfdst. 3

- Een straalvliegtuig duikt verticaal met een snelheid van 1200 km/u en behoudt voortdurend deze snelheid. Als de piloot een maximale versnelling van 5g kan doorstaan, op welke hoogte moet hij dan een kwartdraai beginnen maken om niet te pletter te vliegen? (verwaarloos zwaartekracht)



Aanvulling: Niet-constante Versnelling

- Is de versnelling \vec{a} gekend als functie van de tijd, dan kan men via integratie de snelheid berekenen als functie van de tijd en daaruit de plaats als functie van de tijd.
- $\vec{a}(t)$ gekend, dan:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t) dt$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) dt$$

Hoofdstuk 10

Essential University Physics

Richard Wolfson
3rd Edition

Rotatiebeweging

Rotational Motion

© Johan D'heer

1

Translatie- en Rotatie-beweging

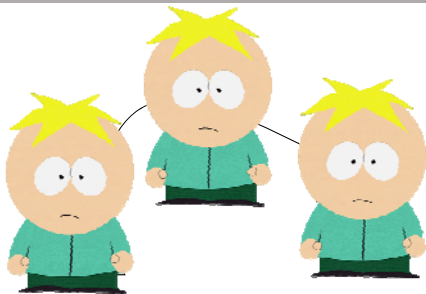
- \$1
- \$2
- \$3, behalve
Example 5, Example 6, Example 7
- \$4
- \$5



© Johan D'heer

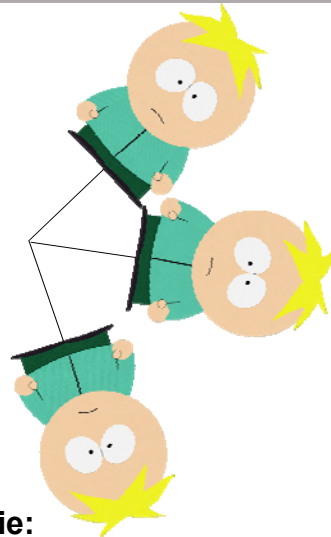
2

Translatie- en Rotatie-beweging



Translatie:
stand t.o.v. assenkruis niet veranderd

Opm.:
puntmassa enkel translatie



Rotatie:
stand t.o.v. assenkruis wel veranderd

© Johan D'heer

3

Translatie- en Rotatie-beweging

Voorwerpen:

Meestal combinatie van translatie en rotatie.
Translatie van het massamiddelpt.
+ rotatie rond dit massamiddelpt.



In deze cursus:

Enkel rotaties van **starre lichamen**
rond een as met vaste richting, vb.:
cd.

Star lichaam: onderlinge posities
van deeltjes van het lichaam
veranderen niet.



© Johan D'heer

4

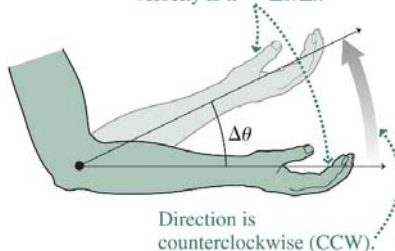
10.1 Hoeksnelheid (Angular Velocity)

- Hoeksnelheid ω is het tempo waarmee de hoekpositie verandert.

$$\text{Gemiddelde: } \bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\text{Ogenblikkelijke: } \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

The arm rotates through the angle $\Delta\theta$ in time Δt , so its average angular velocity is $\bar{\omega} = \Delta\theta/\Delta t$.



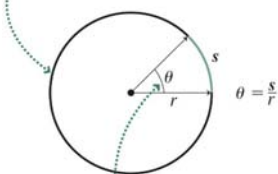
© Johan D'heer

5

10.1 Hoeksnelheid (Angular Velocity)

- Hoeksnelheid en lineaire snelheid (= translatiesnelheid)
 - De lineaire snelheid van een punt van een roterend lichaam is evenredig met de afstand tot de rotatieas:

The full circumference is $2\pi r$, so 1 revolution is 2π radians. That makes 1 radian $360^\circ/2\pi$ or about 57.3° .

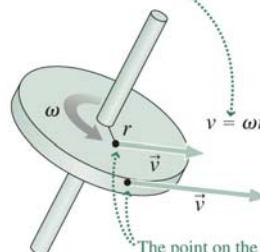


Angle in radians is the ratio of arc s to radius r : $\theta = s/r$. Here θ is a little less than 1 radian.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{r}$$

$$v = \omega r$$

Linear speed is proportional to distance from the rotation axis.



The point on the rim has the same angular speed ω but a higher linear speed v than the inner point.

© Johan D'heer

6

Hoekversnelling (Angular acceleration)

- Hoekversnelling α is het tempo waarmee de hoeksnelheid verandert.

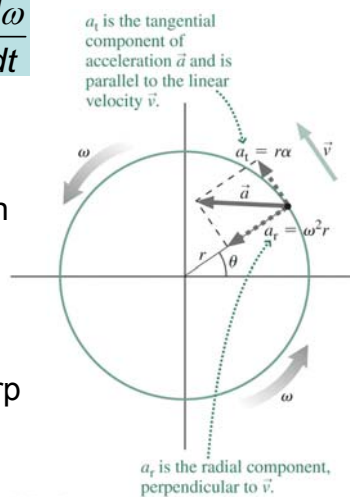
$$\text{Gemidd.: } \bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{Ogenbl.: } \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

- Hoekversnelling en tangentiële versnelling

- De tangentiële versnelling van een punt op een roterend lichaam is evenredig met de afstand tot de rotatieas: $a_t = r\alpha$

- Een punt op een roterend voorwerp heeft ook een radiale versnelling:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

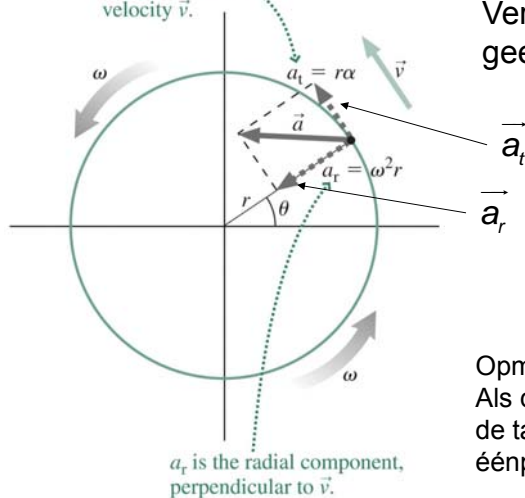


© Johan D'heer

7

Hoekversnelling (Angular acceleration)

a_t is the tangential component of acceleration \vec{a} and is parallel to the linear velocity \vec{v} .



Verandering van de richting van \vec{v} geeft \vec{a}_r
Verandering van grootte van \vec{v} geeft \vec{a}_t

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

Opmerking:
Als de grootte van \vec{v} constant is, is de tangentiële versnelling nul: éénparig cirkelvormige beweging.

© 2012 Pearson Education, Inc.

© Johan D'heer

8

Conceptvraag

- Wanneer een star voorwerp roteert rond een vaste as hebben alle punten van dit voorwerp dezelfde
 - A) tangentiële (= lineaire) snelheid.
 - B) hoekversnelling.
 - C) tangentiële versnelling.
 - D) lineaire verplaatsing.
 - E) centripetale versnelling.

© Johan D'heer

9

Conceptvraag

- Een horizontale schijf roteert rond een verticale as door het midden van de schijf. Punt P ligt halfweg tussen het midden en de rand van de schijf, en punt Q ligt op de rand. Als de schijf met constante hoeksnelheid roteert, welke bewering(en) is juist? (Meerdere oplossingen mogelijk!)
 - A) P en Q hebben dezelfde tangentiële versnelling.
 - B) Q beweegt tweemaal zo snel als P .
 - C) De tangentiële versnelling van Q is tweemaal zo groot als deze van P en verschilt van nul.
 - D) De tangentiële versnelling van P is tweemaal zo groot als deze van Q en verschilt van nul.
 - E) De hoeksnelheid van Q is tweemaal zo groot als de hoeksnelheid van P .

© Johan D'heer

10

Vraagstuk 16 hfdst. 10

- Een cirkelzaag met een diameter van 32 cm roteert tegen 2100 omw/min (rpm). Hoe snel moet je een handzaag vooruit duwen opdat de zaag even snel door het hout zou gaan als de snelheid waarmee de zaagtanden van de cirkelzaag bewegen?

Vraagstuk 17 hfdst. 10

- De rotatiesnelheid van een CD varieert tussen 190 rpm en 480 rpm. Als de CD een speelduur heeft van 76 min, wat is dan de gemiddelde hoekversnelling in (a) rpm/s en in (b) rad/s²?

Constate Hoekversnelling

- Problemen met constante hoekversnelling zijn volkomen analoog aan gelijkaardige problemen met constante versnelling in één dimensie.
 - Dezelfde vergelijkingen gelden, mits volgende substituties

$$x \rightarrow \theta, \quad v \rightarrow \omega, \quad a \rightarrow \alpha$$

Table 10.1 Angular and Linear Position, Velocity, and Acceleration

Linear Quantity	Angular Quantity
Position x	Angular position θ
Velocity $v = \frac{dx}{dt}$	Angular velocity $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Acceleration $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Angular acceleration $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
Equations for Constant Linear Acceleration	
$\bar{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$ (2.8)	$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ (10.6)
$v = v_0 + at$ (2.7)	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ (10.7)
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ (2.10)	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ (10.8)
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ (2.11)	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$ (10.9)

© Johan D'heer

13

Constate Hoekversnelling

Table 10.1 Angular and Linear Position, Velocity, and Acceleration

Linear Quantity	Angular Quantity
Position x	Angular position θ
Velocity $v = \frac{dx}{dt}$	Angular velocity $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Acceleration $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Angular acceleration $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
Equations for Constant Linear Acceleration	
$\bar{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$ (2.8)	$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ (10.6)
$v = v_0 + at$ (2.7)	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ (10.7)
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ (2.10)	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ (10.8)
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ (2.11)	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$ (10.9)

© 2012 Pearson Education, Inc.

© Johan D'heer

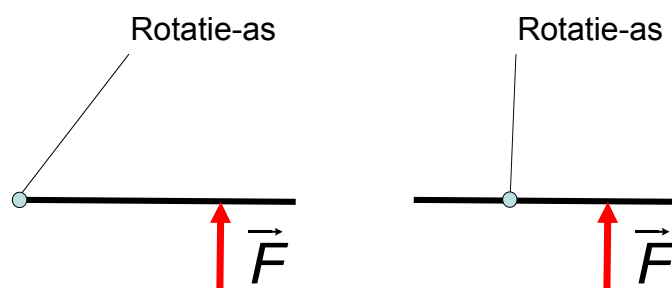
14

Vraagstuk 18 hfdst. 10

- Een turbine versnelt tijdens het opstarten vanuit rust met een hoekversnelling van $0,60 \text{ rad/s}^2$.
- (a) Hoe lang duurt het voor ze een hoeksnelheid van 5400 omw/min bereikt?
- (b) Hoeveel omwentelingen heeft ze gedurende deze tijd gemaakt?

10.2 Krachtmoment (Torque)

- Krachtmoment τ is het equivalent van kracht bij rotaties.
- Krachtmoment zorgt voor verandering van rotatie-toestand.
- Krachtmoment wordt bepaald t.o.v. een gekozen rotatie-as.



Zelfde kracht zorgt voor verschillende rotaties!

10.2 Krachtmoment (Torque)

- Krachtmoment hangt af van:
 - de afstand van de rotatieas tot het aangrijpingspunt van de kracht.
 - de grootte van de kracht \vec{F} .
 - de oriëntatie van de kracht t.o.v. de verplaatsing \vec{r} van de rotatieas tot het aangrijpingspunt van de kracht:

$$\tau = rF \sin \theta$$

The same force is applied at different points on the wrench.

Closest to O , τ is smallest.

Farther away, τ becomes larger.

The same force is applied at different angles.

Torque is greatest when \vec{F} is perpendicular to \vec{r} .

Torque decreases when \vec{F} is no longer perpendicular to \vec{r} .

Torque is zero when \vec{F} is parallel to \vec{r} .

Farthest away, τ becomes greatest.

© 2012 Pearson Education, Inc. © Johan D'heer 17

Krachtmoment (Torque)

F_{\perp} is the effective force; F_{\parallel} doesn't produce torque.

r_{\perp} is the **lever arm**—the effective distance at which \vec{F} acts.

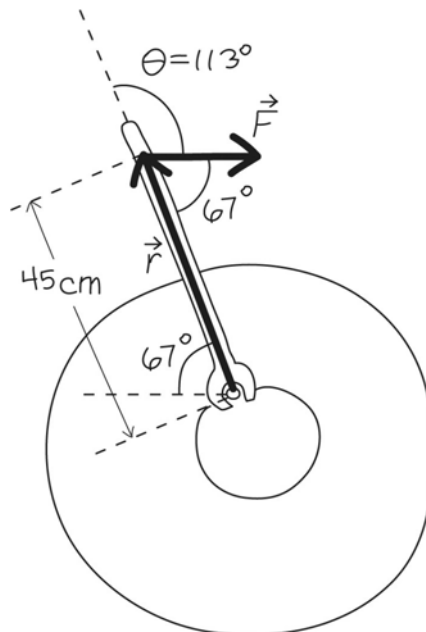
$F_{\perp} = F \sin \theta$

$r_{\perp} = r \sin \theta$

- Krachtmoment = afstand draaipunt-kracht \times component kracht \perp op
- Krachtmoment = \perp afstand tot kracht \times grootte kracht

© 2012 Pearson Education, Inc. © Johan D'heer 18

Krachtsmoment (Torque)



© Johan D'heer

© 2012 Pearson Education, Inc.

19

Vraagstuk 21 hfdst. 10

- Om een draaideur te openen is een krachtsmoment nodig van 210 Nm. Als een kind een maximale duwkracht van 35 N kan uitoefenen, op welke afstand van de rotatieas van de deur moet het kind deze kracht uitoefenen?

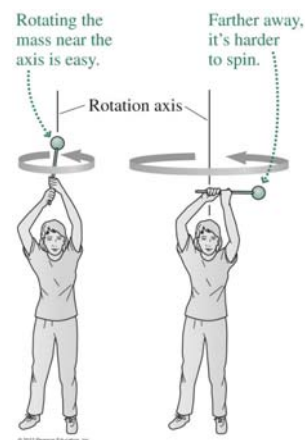
Vraagstuk 24 hfdst. 10

- Je fiets staat omgekeerd met de wielen naar boven voor reparatie. Het voorwiel is perfect uitgebalanceerd en kan vrij roteren, afgezien van het ventiel dat een massa van 22 g heeft. Het ventiel bevindt zich 32 cm van de rotatieas en 23° onder de horizontale. Wat is het netto krachtmoment dat werkt op het voorwiel?

10.3 Tweede Wet van Newton Wet voor Rotaties

- **Traagheidsmoment (rotational inertia) I** is het equivalent van massa voor rotaties.
 - Traagheidsmoment hangt af van:
 - *massa*
 - *afstand tot de rotatieas*
- Hoekversnelling, krachtmoment, en traagheidsmoment vormen de onderdelen van de *tweede wet van Newton voor rotaties*:

$$\tau = I\alpha$$



Wat is Traagheidsmoment?

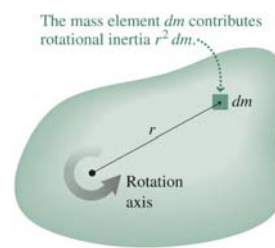
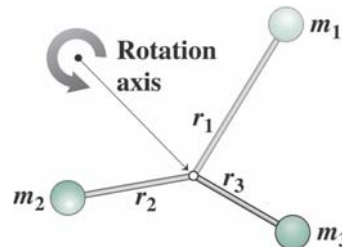
- Voor een puntmassa m is het traagheidsmoment het produkt van de massa met het kwadraat van de afstand R tot de rotatieas: $I = mR^2$.

- Voor een systeem van discrete massa's is het traagheidsmoment de som van de traagheidsmomenten van de individuele massa's:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

- Voor een continue massa-verdeling wordt the traagheidsmoment gegeven door:

$$I = \int r^2 dm$$



© Johan D'heer

23

Conceptvraag

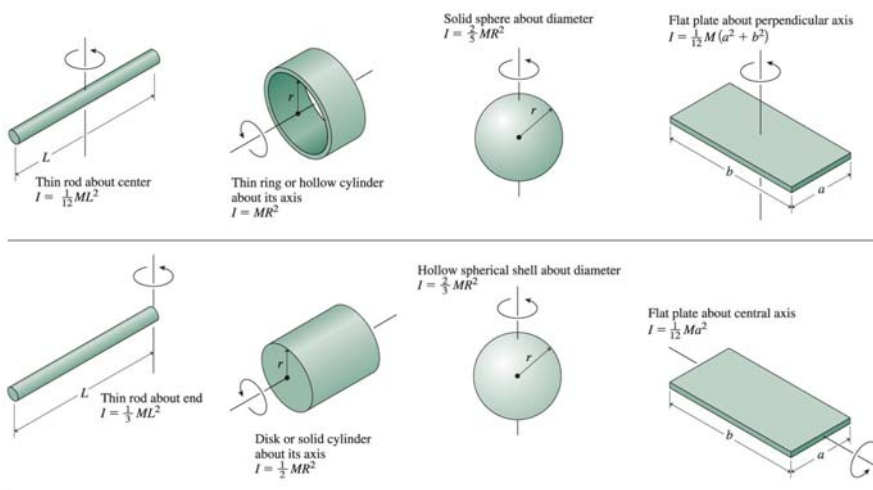
- Een massieve bol en een holle sfeer hebben dezelfde straal en dezelfde massa. Beide roteren rond een as die door hun middelpunt gaat. Welke bewering over hun traagheidsmoment is juist?
 - Het traagheidsmoment van de bol is groter dan dit van de sfeer.
 - Het traagheidsmoment van de sfeer is groter dan dit van de bol.
 - Het traagheidsmoment van de bol is gelijk aan dit van de sfeer.
 - We kunnen hun traagheidsmoment niet vergelijken vermits we hun hoekversnelling niet kennen.

© Johan D'heer

24

Traagheidsmoment van Eenvoudige Voorwerpen

Table 10.2 Rotational Inertias



© Johan D'heer

25

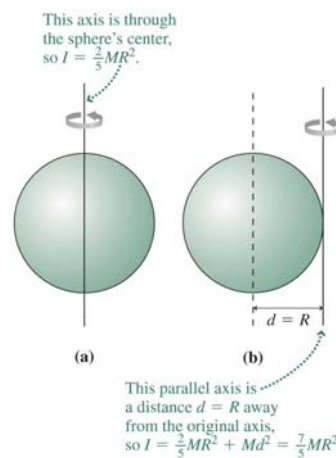
Stelling van Steiner (Parallel-Axis Theorem)

- Kennen we het traagheidsmoment I_{cm} rond een as door het massamiddelpunt, dan is met de **stelling van Steiner** het traagheidsmoment I rond elke evenwijdige as te berekenen.

- Stelling van Steiner:

$$I = I_{cm} + Md^2$$

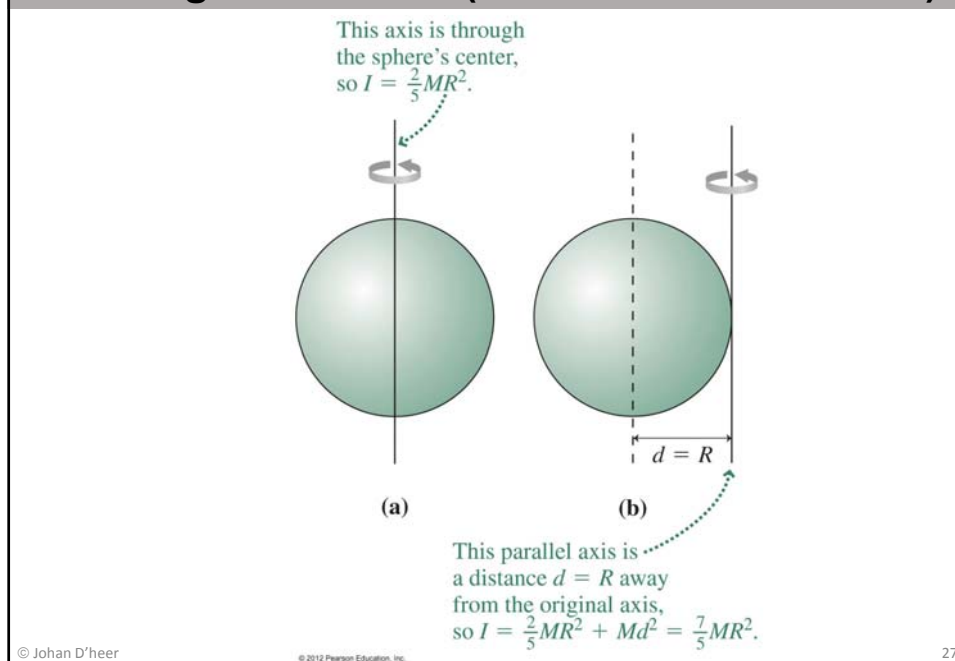
met d de afstand van de as door het massamiddelpunt tot de parallelle as en M is de totale massa van het voorwerp.



© Johan D'heer

26

Stelling van Steiner (Parallel-Axis Theorem)



Vraagstuk 27 hfdst. 10

- De kamer van een polijstmachine voor stenen bestaat uit een holle cilinder (massa = 120 g en straal = 8,5 cm). De kamer wordt langs beide zijden afgesloten met cirkelvormige deksels, elk met een massa van 33 g.
 - (a) Wat is het traagheidsmoment rond de centrale as?
 - (b) Welk krachtmoment is nodig om de kamer een hoekversnelling van $3,3 \text{ rad/s}^2$ te geven?

Vraagstuk 33 hfdst. 10

- In het MIT Magnet Laboratory wordt energie opgeslagen in vliegwheels met een massa van $7,7 \times 10^4$ kg en een straal van 2,4 m. De as van de vliegwheels heeft een diameter van 41 cm. Als een wrijvingskracht van 34 kN tangentieel op de as wordt uitgeoefend, hoelang zal het dan duren voor een vliegwiel dat roteert tegen 3600 omw/min volledig stilstaat?

Combinatie van Rotatie en Translatie Dynamica

- Problemen met translatie en rotatie beweging:
 - Krachten die zorgen voor translatie \rightarrow 2^{de} wet Newton voor translaties.
 - Krachten die zorgen voor rotatie \rightarrow 2^{de} wet Newton voor rotaties.

A bucket of mass m drops into a well, its rope unrolling from a cylinder of mass M and radius R .

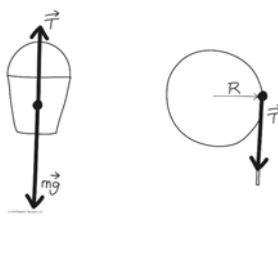
What's its acceleration?



© Johan D'heer

Free-body diagrams for bucket and cylinder

Rope tension \vec{T} provides the connection



Newton's law, bucket:

$$F_{\text{net}} = mg - T = ma$$

Rotational analogy of Newton's law, cylinder:

$$RT = I\alpha/R$$

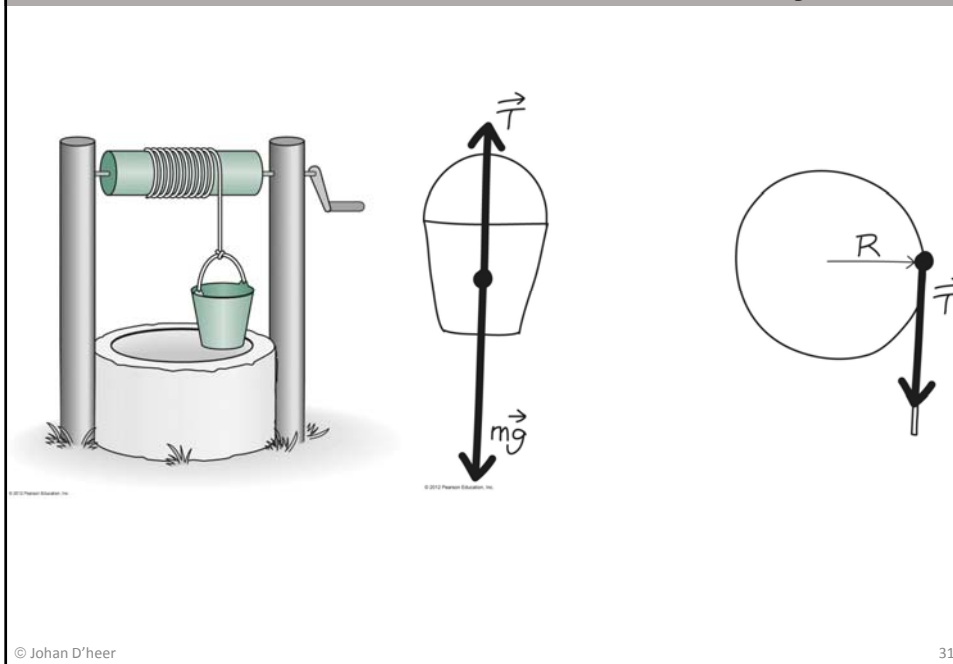
Here $I = \frac{1}{2} MR^2$

Solve the two equations to get

$$a = \frac{mg}{m + \frac{1}{2} M}$$

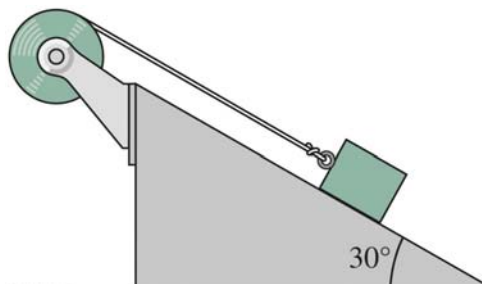
30

Combinatie van Rotatie en Translatie Dynamica



Vraagstuk 57 hfdst. 10

- Een massa van 3,0 kg ligt op een helling en is via een touw met verwaarloosbare massa verbonden met een massieve cilinder met massa 0,90 kg en straal 4,5 cm. Wanneer het blok wordt losgelaten krijgt het een versnelling van $1,9 \text{ m/s}^2$. Bereken de wrijvingscoëfficiënt tussen de massa en de helling.



10.4 Rotatie Energie en Arbeid

- Een roterend voorwerp heeft kinetische energie $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$ geassocieerd met de rotatiebeweging.
Het kan ook translatie kin. energie hebben: $K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M v^2$.
- Arbeid geleverd door krachtmoment dat voor rotatie zorgt:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta.$$

- Arbeid – energie stelling:

$$\Delta K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2 = W_{\text{net}, \tau}$$

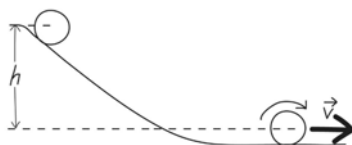
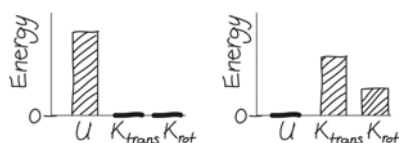
© Johan D'heer

33

Rotatie Energie en Arbeid

- Bij behoud van energie met roterende voorwerpen moet je met beide vormen van kinetische energie rekening houden.
 - Voor rollende voorwerpen is er een verband tussen de twee. Dit verband hangt af van het traagheidsmoment.

Example: A solid ball rolls (no slipping) down a hill. How fast is it moving at the bottom?



Equation for energy conservation

$$\begin{aligned} Mgh &= \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} MR^2 \right) \left(\frac{v}{R} \right)^2 = \frac{7}{10} Mv^2 \end{aligned}$$

$$\text{Solution: } v = \sqrt{\frac{10}{7} gh}$$

© Johan D'heer

34

Rotatie Energie en Arbeid

Energy

U K_{trans} K_{rot}

Energy

U K_{trans} K_{rot}

$v = \sqrt{\frac{10}{7} gh}$

© 2012 Pearson Education, Inc. © Johan D'heer 35

10.5 Rollende Beweging

- Rollende beweging is een combinatie van translatie (lineaire) beweging en rotatie beweging.
 - Het massamiddelpunt voert een translatie uit.
 - Het voorwerp zelf roteert rond het massamiddelpunt.
- Opdat een voorwerp zou kunnen rollen moet er wrijving zijn!

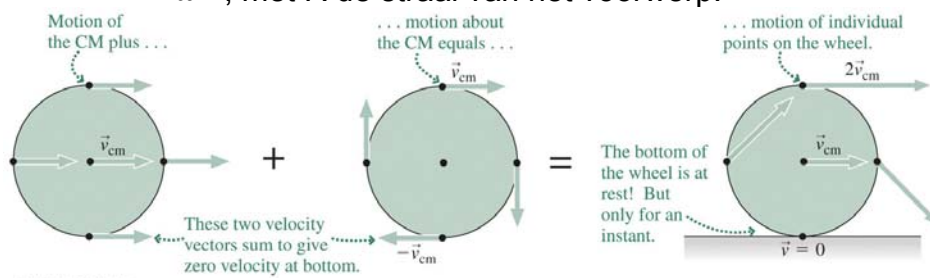
Friction keeps the wheel from slipping.

\vec{f}_s

© 2012 Pearson Education, Inc. © Johan D'heer 36

Rollende Beweging

- Bij **zuiver rollen** beweegt het voorwerp zonder slippen en het punt in contact met de grond is op dat moment in rust.
 - In dit geval is er een verband tussen ω en v : $v = \omega R$, met R de straal van het voorwerp.



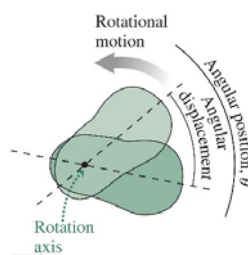
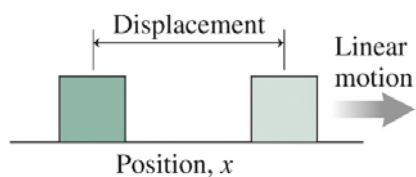
- De arbeid geleverd door de (statische) wrijvingskracht is nul, vermits deze niet beweegt t.o.v. de grond, helling, enz.

© Johan D'heer

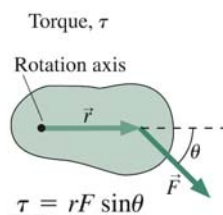
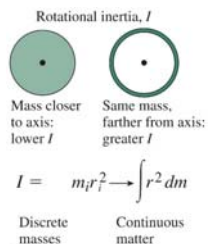
37

Samenvatting

- Eéndimensionale rotatie beweging is volkomen analoog met ééndim. translatie beweging.
 - Transl. en rot. beweging:



- Analogieën tussen rotatie en translatie grootheden:



© Johan D'heer

38

Samenvatting

Linear Quantity or Equation	Angular Quantity or Equation	Relation Between Linear and Angular Quantities
Position x	Angular position θ	
Speed $v = dx/dt$	Angular speed $\omega = d\theta/dt$	$v = \omega r$
Acceleration a	Angular acceleration α	$a_t = \alpha r$
Mass m	Rotational inertia I	$I = \int r^2 dm$
Force F	Torque τ	$\tau = rF \sin \theta$
Kinetic energy $K_{\text{trans}} = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetic energy $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$	
Newton's second law (constant mass or rotational inertia):		
$F = ma$	$\tau = I\alpha$	

© 2012 Pearson Education, Inc.

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$$

$$\Delta K_{\text{tr}} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_{\text{net},F}$$

$$\Delta K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 = W_{\text{net},\tau}$$

© Johan D'heer

39

Vraagstuk 40 hfdst. 10

- Een rollende bal heeft een totale kinetische energie van 100 J, waarvan 40 J rotatie kinetische energie. Is deze bal hol of massief?

Vraagstuk 68 hfdst. 10

- Een knikker start vanuit rust en rolt zonder slippen van een helling in een verticale looping. Van welke minimale hoogte moet de knikker starten opdat hij de looping zou kunnen nemen.

