

# Evenwicht van een star lichaam

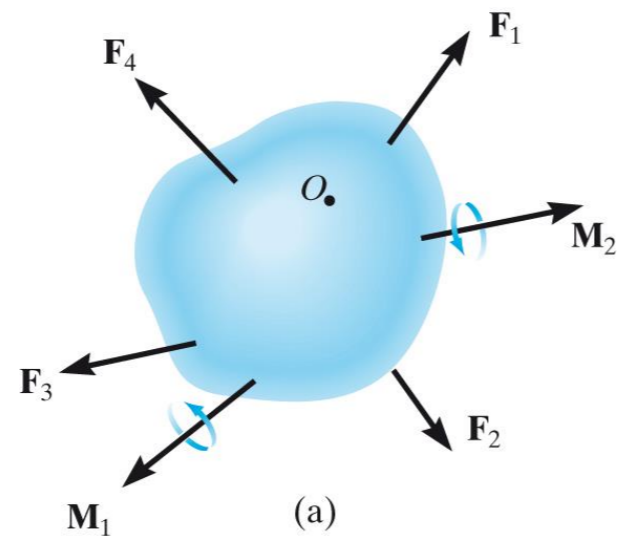


# Hoofdstukdoelen

- De evenwichtsvergelijkingen voor een star lichaam opstellen
- Concept van het vrijlichaamsschema voor een star lichaam
- Vraagstukken over starre lichamen oplossen met behulp van de evenwichtsvergelijkingen

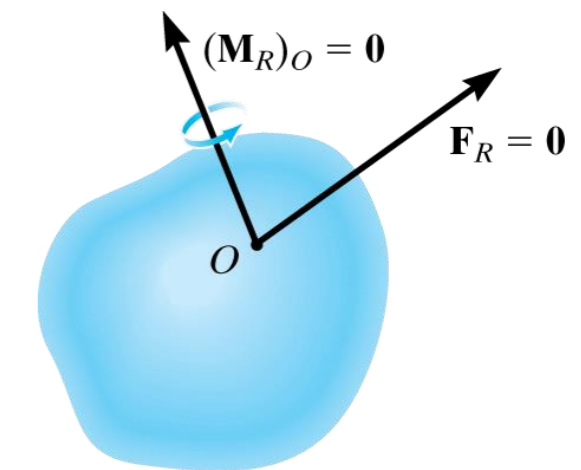
# Evenwicht van een star lichaam

- Het evenwicht van een star lichaam wordt uitgedrukt door



$$\vec{F}_R = \sum \vec{F} = 0$$

$$\left(\vec{M}_R\right)_O = \sum \vec{M}_O = 0$$

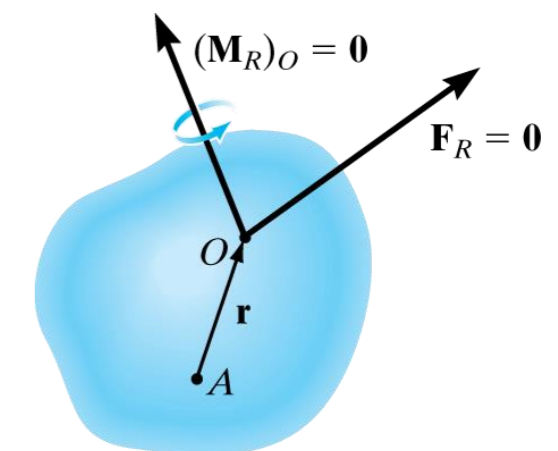


(b)

- Bij het sommeren van momenten rond een ander punt, zoals punt A, eisen we

$$\sum \vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F}_R + \left(\vec{M}_R\right)_O = 0$$

$$\vec{r} \neq 0!!$$

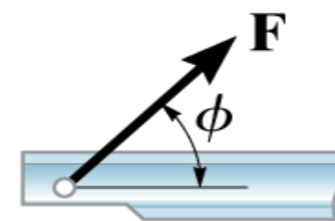
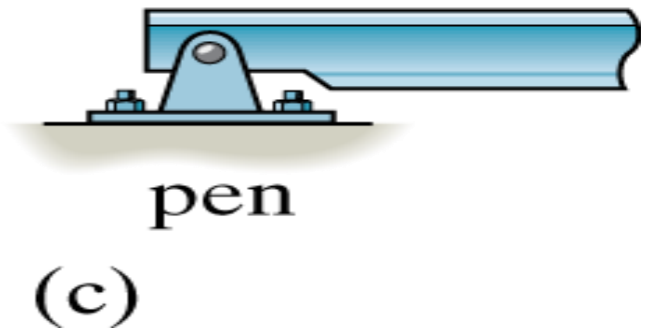
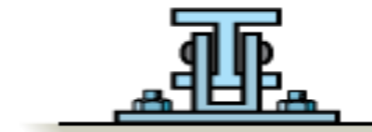
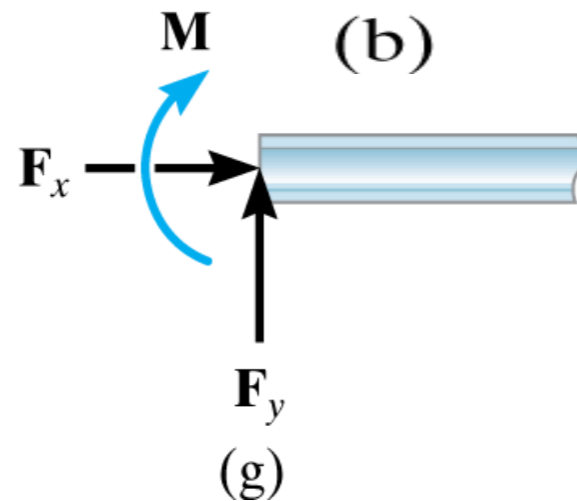
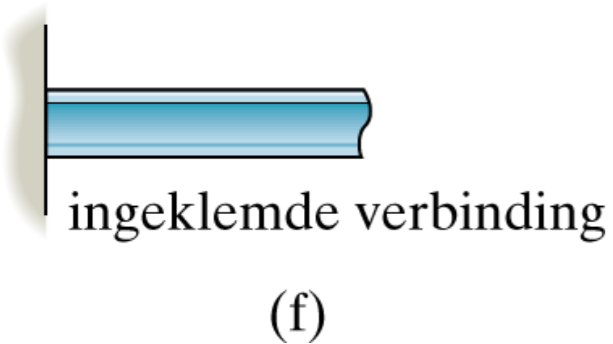
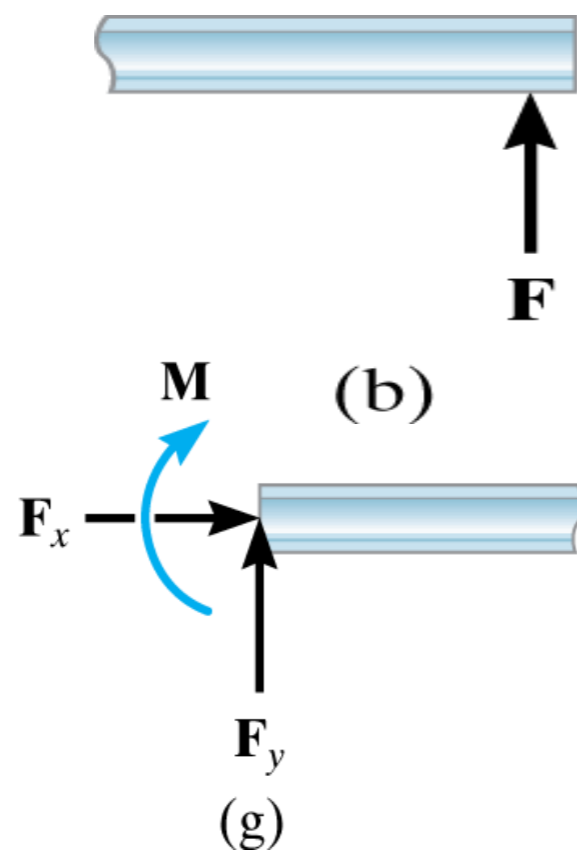
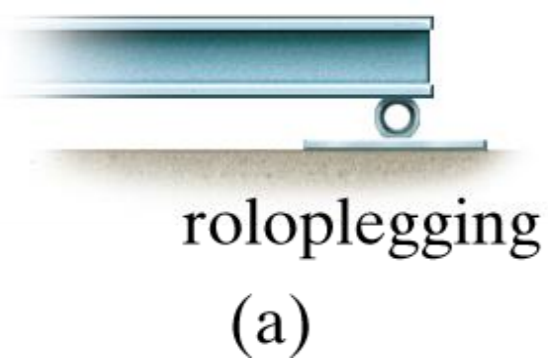


(c)

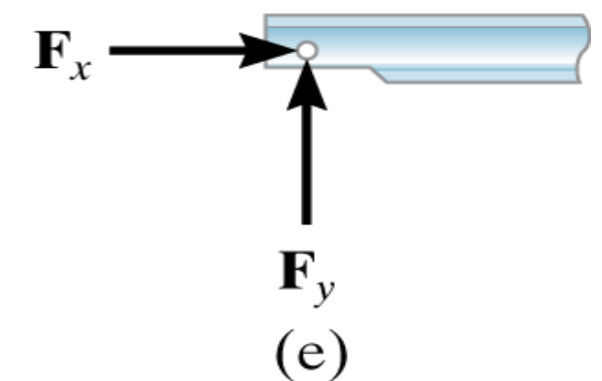
# Vrijlichaamsschema's

## Steunpuntreacties

- Als een steunpunt de translatie van een lichaam in een bepaalde richting verhindert, dan wordt er op het lichaam een kracht in die richting ontwikkeld.
- Als de rotatie wordt verhinderd, wordt er een koppelmoment op het lichaam uitgeoefend.

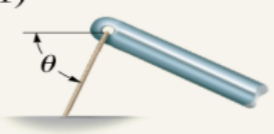
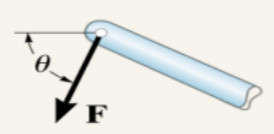
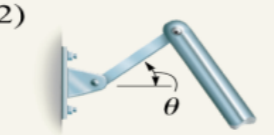
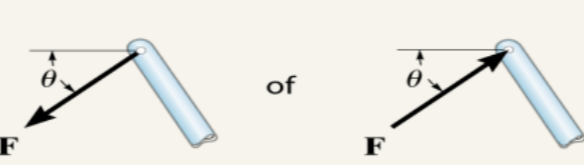
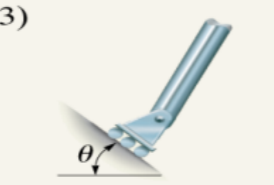
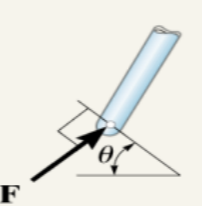
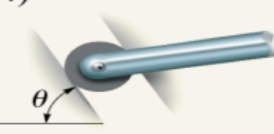
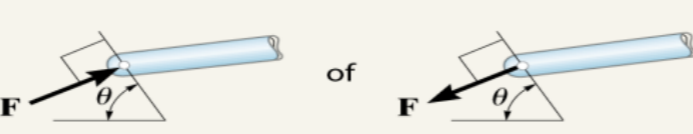
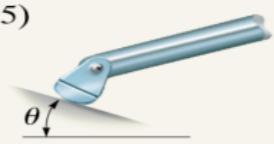
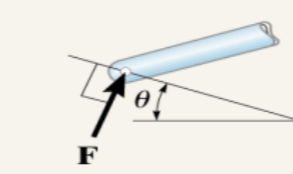
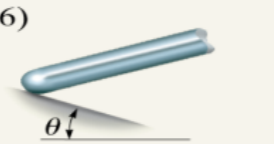
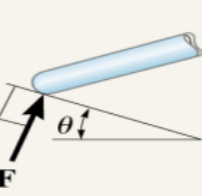
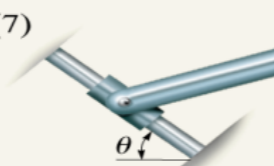
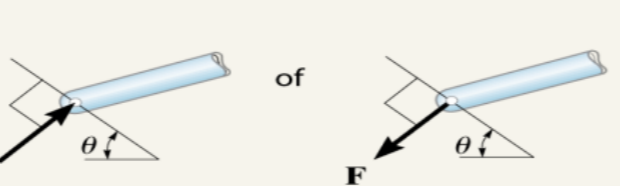


of



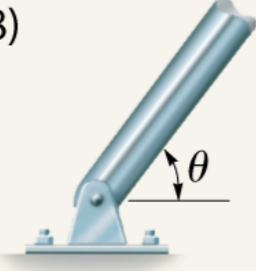

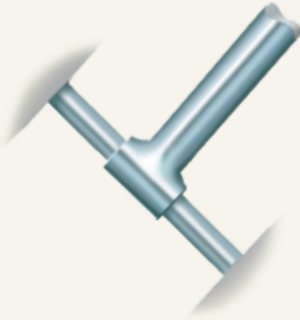
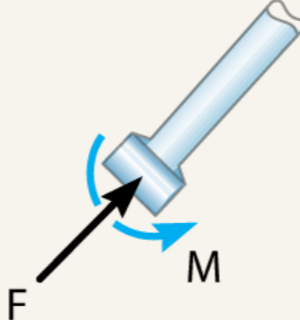
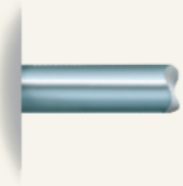
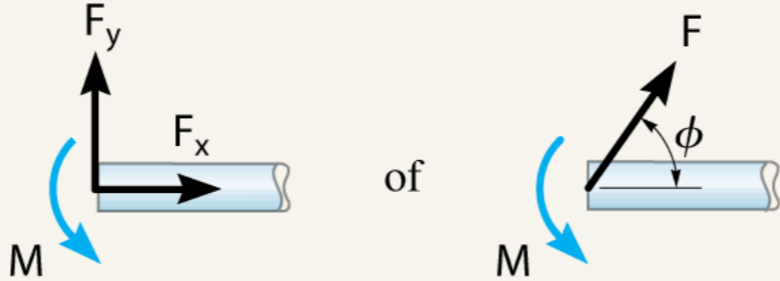
# Vrijlichaamschema's

Tabel 5.1 Verbindingen van starre lichamen waarop tweedimensionale krachtensystemen werken

Soorten verbindingen	Reactie	Aantal onbekenden
(1)  kabel		Eén onbekende. De reactie is een trekkracht die van het element af werkt in de richting van de kabel.
(2)  gewichtloos verbindingsstuk		Eén onbekende. De werklijn van de reactiekracht is de as van het verbindingsstuk.
(3)  roloplegging		Eén onbekende. De reactiekracht staat loodrecht op het oppervlak en grijpt aan in het contactpunt.
(4)  rolwiel of pen in gladde gleuf		Eén onbekende. De reactiekracht staat loodrecht op de gleuf.
(5)  schommelverbinding		Eén onbekende. De reactiekracht staat loodrecht op het oppervlak en grijpt aan in het contactpunt.
(6)  glad contactoppervlak		Eén onbekende. De reactiekracht staat loodrecht op het oppervlak en grijpt aan in het contactpunt.
(7)  pen bevestigd aan bus op een gladde stang		Eén onbekende. De reactiekracht staat loodrecht op de stang.

# Vrijlichaamsschema's

Tabel 5.1 Vervolg

Soorten verbindingen	Reactie	Aantal onbekenden
<p>(8)</p>  <p>gladde pen of scharnier</p>		<p>Twee onbekenden. De reactie bestaat uit twee krachtcomponenten, of de grootte en richting <math>\phi</math> van de krachtresultante. Merk op dat <math>\phi</math> en <math>\theta</math> niet noodzakelijkerwijs gelijk zijn [meestal niet, tenzij de afgebeelde staaf een, aan beide zijden draaibaar verbindingsstuk, is, zoals in (2)].</p>
<p>(9)</p>  <p>element vast bevestigd aan bus op een gladde stang</p>		<p>Twee onbekenden. De reactie bestaat uit het koppelmoment en een kracht die loodrecht op de stang werkt.</p>
<p>(10)</p>  <p>ingeklemde verbinding</p>		<p>Drie onbekenden. De reactie bestaat uit het koppelmoment en de twee krachtcomponenten, of het koppelmoment en de grootte en richting <math>\phi</math> van de krachtresultante.</p>

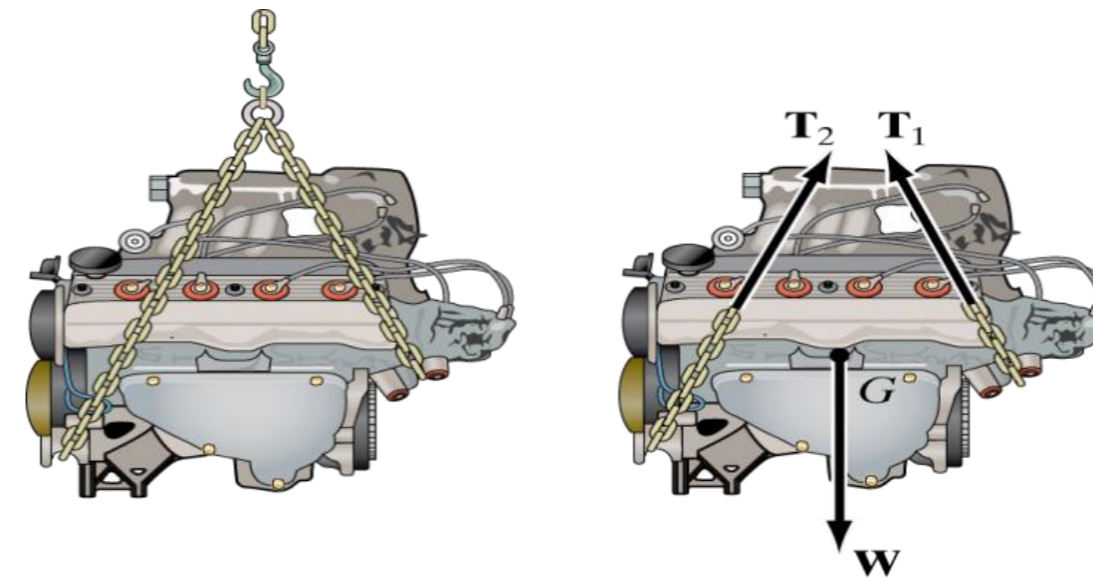
# Vrijlichaamsschema's



# Vrijlichaamsschema's

## Interne krachten

- Op een star lichaam kunnen externe en interne krachten werken
- Bij een vrijlichaamsschema worden interne krachten tussen deeltjes die binnen de grenzen van het schema vallen, niet weergegeven
- Deeltjes buiten deze grenzen oefenen externe krachten uit op het systeem



(a)

(b)



# Vrijlichaamsschema's

## **Gewicht en zwaartepunt**

- Elk deeltje heeft een bepaald gewicht
- Het systeem kan worden voorgesteld door één resultante, bekend als het gewicht **W** van het lichaam
- De plaats van het aangrijpingspunt van deze kracht staat bekend als het zwaartepunt

# Vrijlichaamsschema's

## Procedure voor het tekenen van een vrijlichaamsschema

### 1. Maak een schets van de vorm

- Stel het lichaam voor als geïsoleerd of vrijgemaakt van zijn verbindingpunten
- Teken een schets van de vorm

### 2. Geef alle krachten en koppelmomenten aan

- Geef alle externe krachten en koppelmomenten aan die op het lichaam werken

### 3. Bepaal alle belastingen en geef de afmetingen aan

- Geef de afmetingen aan voor het berekenen van de krachten
- Bekende krachten en koppelmomenten moeten op de juiste manier met hun groottes en richtingen worden benoemd

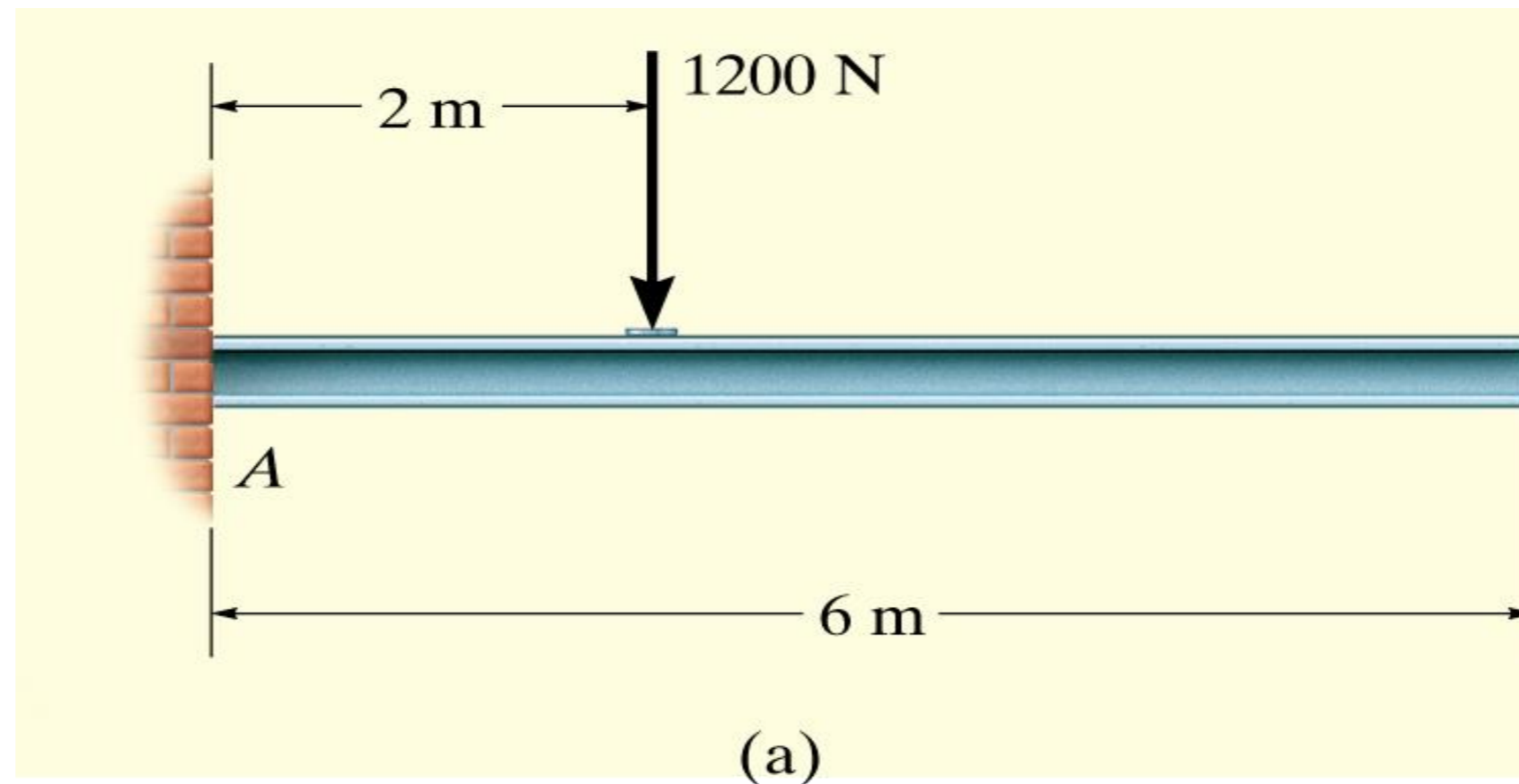
# Vrijlichaamsschema's

## Om te onthouden!

- Geen enkel evenwichtsvraagstuk zou mogen worden opgelost zonder *eerst* het vrijlichaamsschema te tekenen, zodat rekening wordt gehouden met alle krachten en koppelmomenten die op het lichaam werken.
- Wanneer een verbinding *translatie* van een lichaam in een bepaalde richting *verhindert*, dan oefent de verbinding een kracht uit op het lichaam in die richting.
- Wanneer *rotatie* wordt *verhinderd*, dan oefent de verbinding een koppelmoment uit op het lichaam.
- Bestudeer tabel 5.1.
- Inwendige krachten worden nooit aangegeven in het vrijlichaamsschema, aangezien zij optreden in gelijke maar tegengestelde collineaire paren die elkaar opheffen.
- Het gewicht van een lichaam is een uitwendige kracht en het effect ervan wordt voorgesteld door een enkele krachtresultante die in het zwaartepunt  $G$  van het lichaam werkt.
- *Koppelmomenten* kunnen overal in het vrijlichaamsschema worden geplaatst, omdat zij *vrije vectoren* zijn. *Krachten* kunnen op elk punt van hun werklijnen aangrijpen, aangezien zij *glijdende vectoren* zijn.

# Vrijlichaamsschema's

- Voorbeeld 5.1
  - Teken het vrijlichaamsschema van de homogene balk. De balk heeft een massa van 100 kg.



# Vrijlichaamsschema's

## Voorbeeld 5.2

Teken het vrijlichaamsschema voor de voethefboom  $AB$  in fig. 5.8a. De operator oefent een verticale kracht uit op het pedaal, zodanig dat de veer 50 mm wordt uitgerekt en de kracht in de korte aan twee zijden scharnierende verbindingstang in  $B$  100 N is.



# Evenwichtsvergelijkingen

- Voor evenwicht van een star lichaam in 2D geldt

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum M_O = 0$$

- $\sum F_x$  en  $\sum F_y$  stellen de sommen voor van de  $x$ - en  $y$ -componenten van alle krachten
- $\sum M_O$  stelt de som voor van de koppelmomenten en de momenten van de krachtcomponenten

# Evenwichtsvergelijkingen

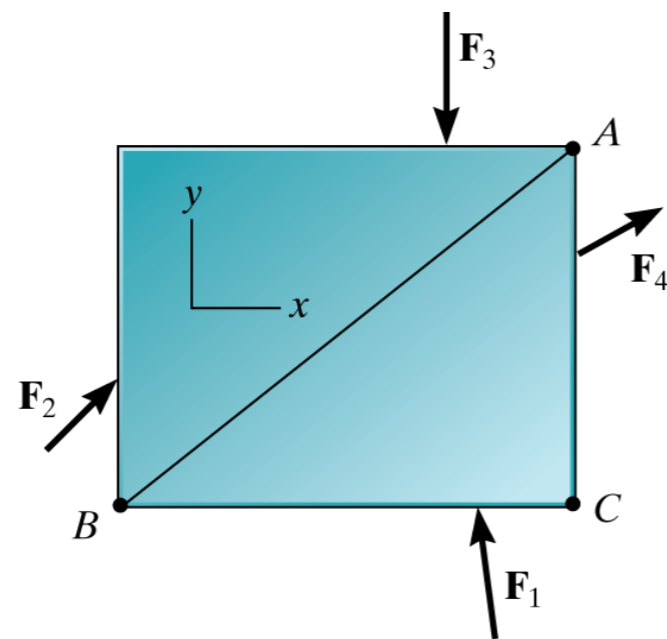
## Alternatieve stelsels evenwichtsvergelijkingen

- Voor evenwichtsvraagstukken in het vlak geldt

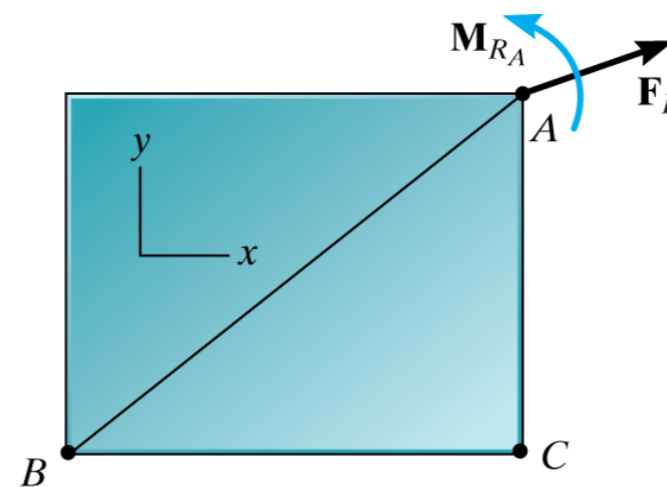
$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum M_O = 0$$

- Bij twee alternatieve stelsels van drie onafhankelijke evenwichtsvergelijkingen geldt

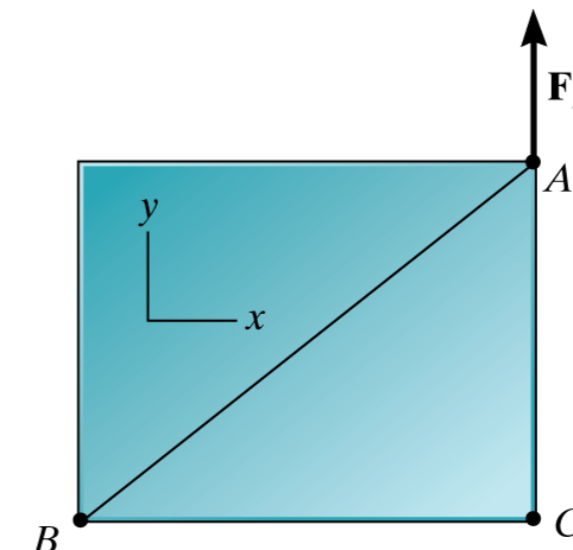
$$\sum F_a = 0; \quad \sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0$$



(a)



(b)



(c)

# Evenwichtsvergelijkingen

## **Analyseprocedure**

### *Vrijlichaamsschema*

- Kracht en koppelmoment hebben een onbekende grootte maar de werklijn mag bekend worden verondersteld
- Geef de afmetingen van het lichaam aan die nodig zijn voor het berekenen van de momenten van de krachten



# Evenwichtsvergelijkingen

## Analyseprocedure

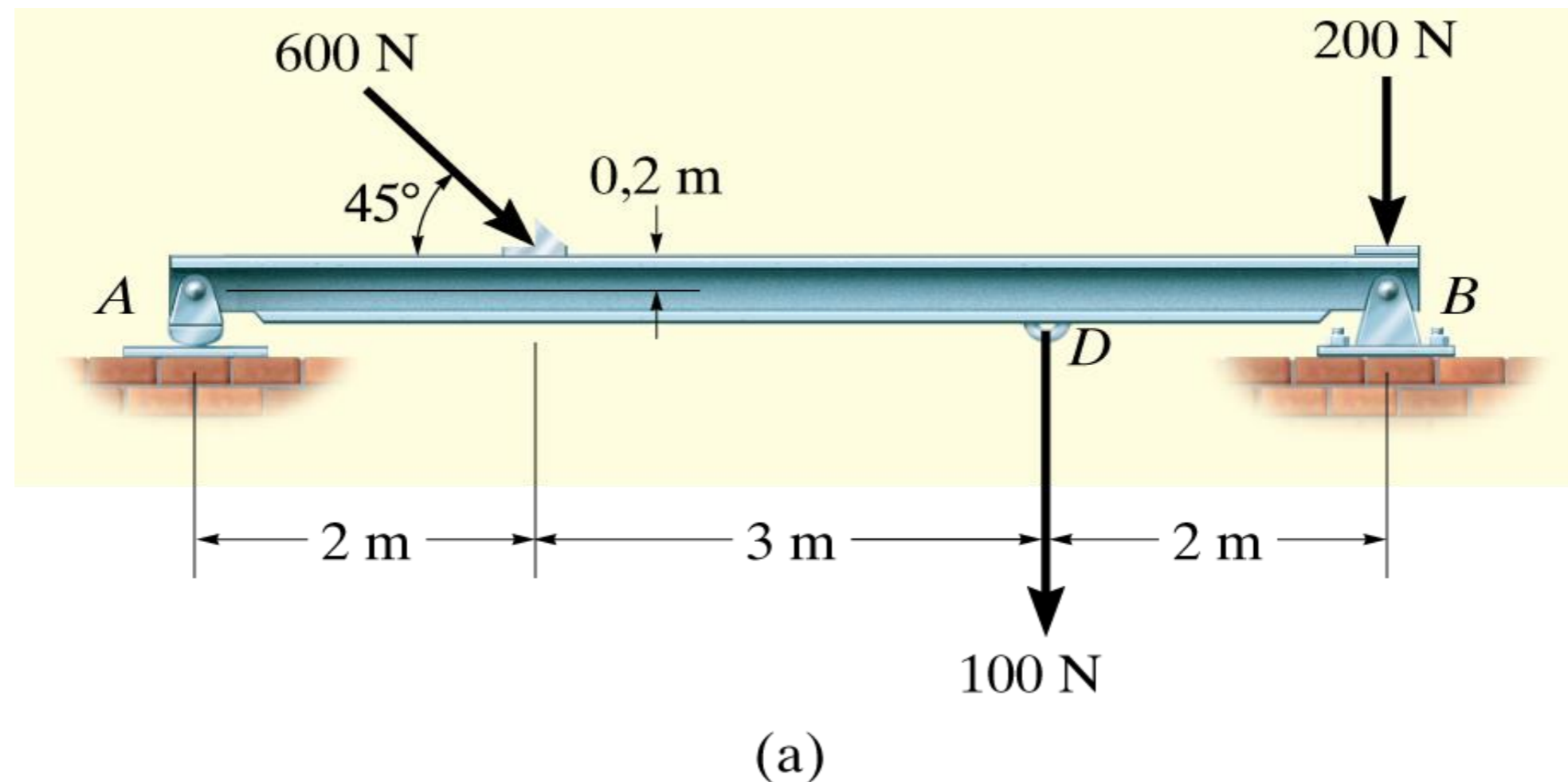
### *Evenwichtsvergelijkingen*

- Pas  $\sum M_O = 0$  toe rond een punt  $O$
- Onbekende momenten zijn nul rond  $O$  en er kan een rechtstreekse oplossing voor de derde onbekende worden verkregen
- Richt de  $x$ - en  $y$ -assen langs de lijnen die de eenvoudigste ontbinding van de krachten in hun  $x$ - en  $y$ -componenten opleveren
- Een negatieve scalair betekent dat de zin van de vector tegengesteld is aan wat in het vrijlichaamsschema was aangenomen

# Evenwichtsvergelijkingen

- Voorbeeld 5.5

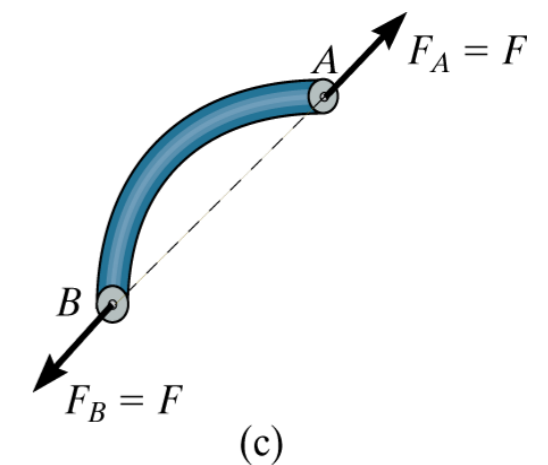
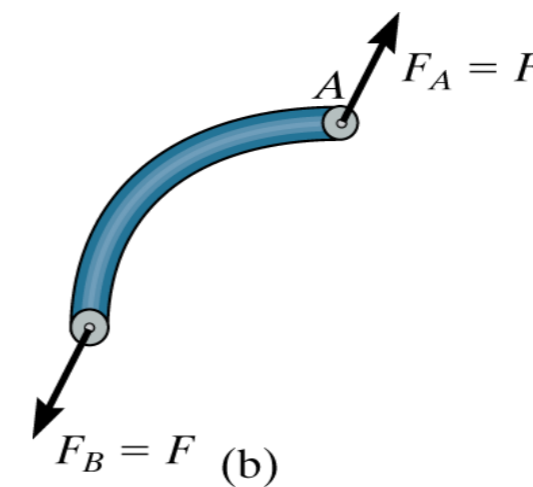
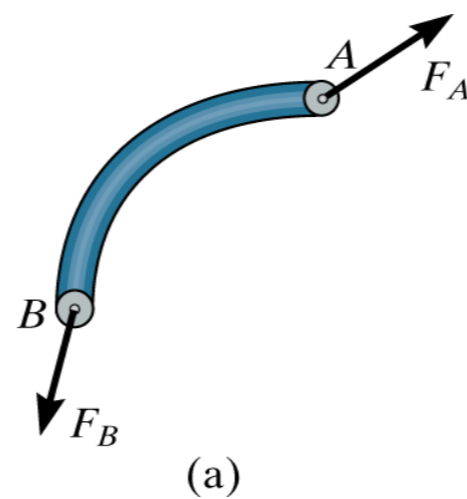
- Bepaal de horizontale en verticale componenten van de reactiekracht voor de belaste balk. Verwaarloos bij de berekeningen het gewicht van de balk.



# Twee- en driekrachtenstelsels

## Tweekrachtelementen

- Wanneer krachten slechts in twee punten op een element worden uitgeoefend, wordt het element een tweekrachtelement genoemd
- Alleen de grootte van de kracht moet worden bepaald

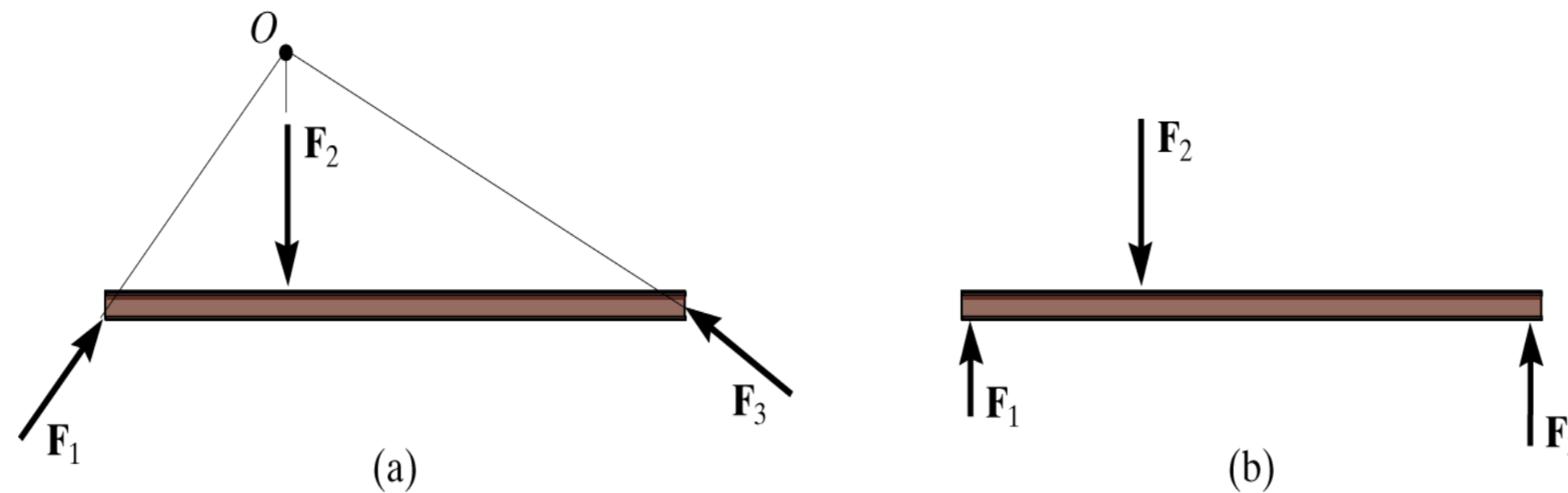


Tweekrachtelement

# Twee- en driekrachtenstelsels

## Driekrachtelementen

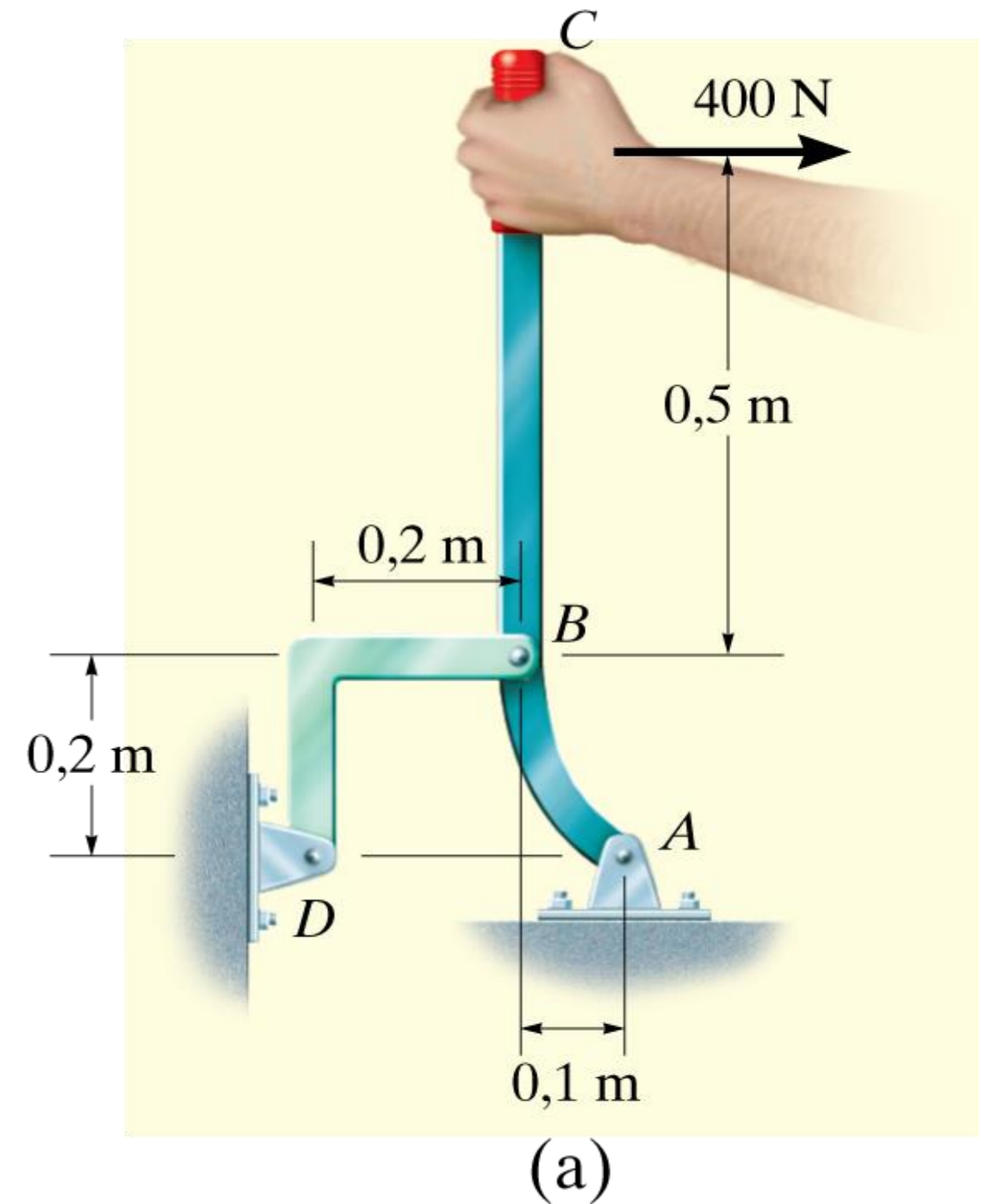
Wanneer op het element drie krachten werken, gaan de werklijnen door hetzelfde punt of zijn de krachten evenwijdig.



Driekrachtelementen

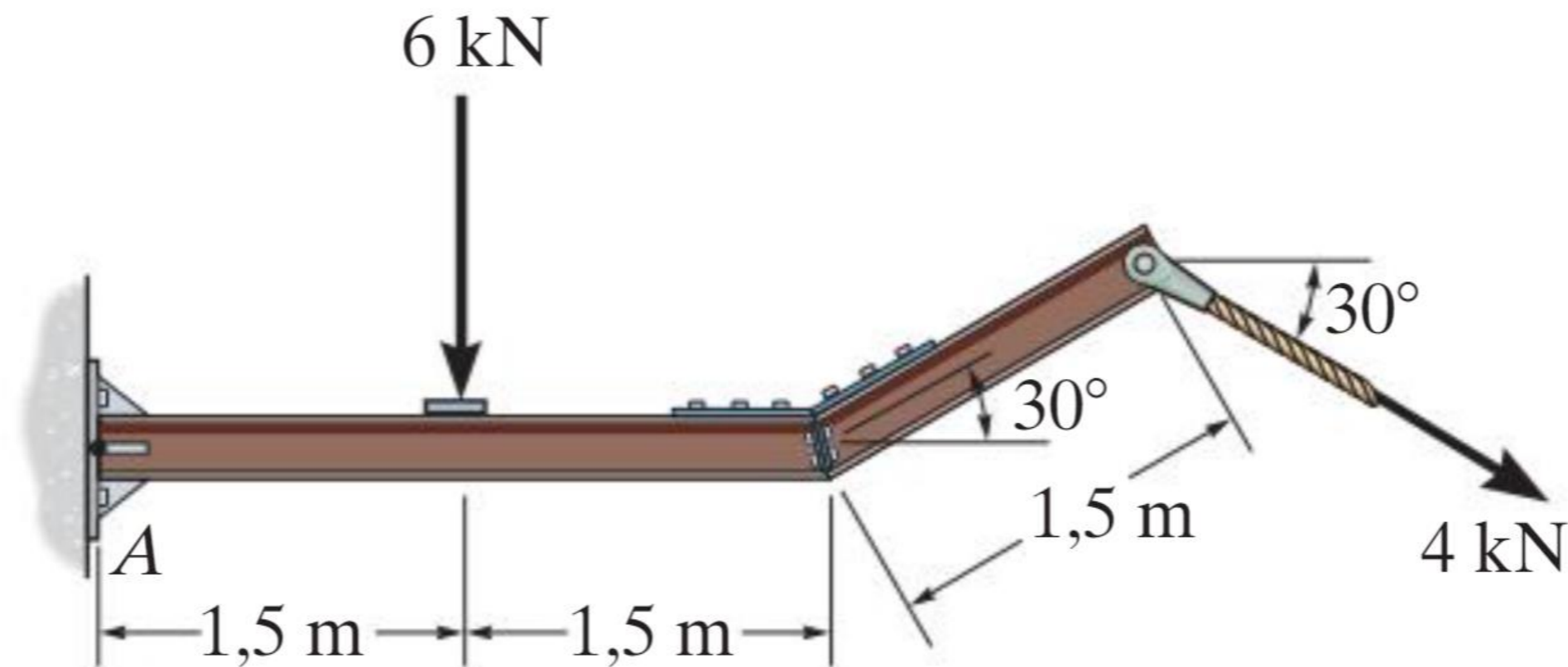
# Twee- en driekrachtenstelsels

- Voorbeeld 5.13
  - De hendel  $ABC$  heeft een penondersteuning in  $A$  en is verbonden met een stang  $BD$ . Als het gewicht van de staven te verwaarlozen is, bepaal dan de kracht van de pen op de hendel in  $A$ .



# Oefening

- 5.13. Bepaal de componenten van de ondersteuningsreacties op de inklemming in  $A$  van de eenzijdig ingeklemde balk.



Vraagstuk 5.13


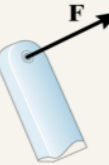

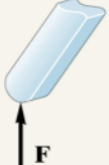
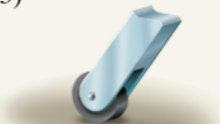
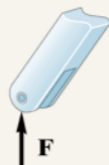

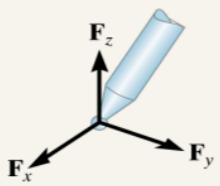
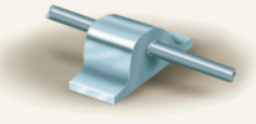
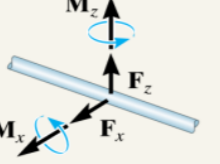
# Evenwicht in drie dimensies


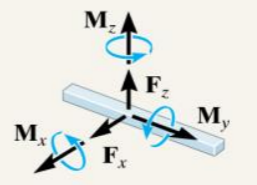

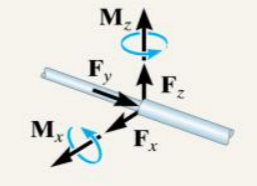

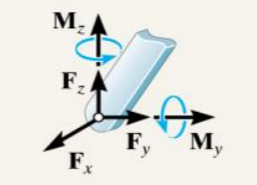

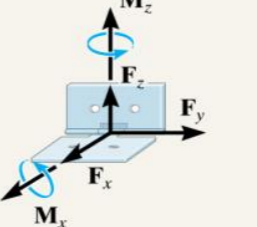

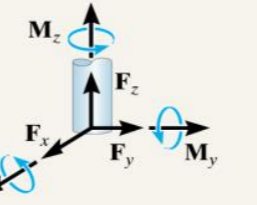
## **Steunpuntreacties**

Zoals in het tweedimensionale geval:

- Door een steunpunt wordt een kracht ontwikkeld
- Wanneer rotatie van het bevestigde element wordt tegengegaan, wordt een koppelmoment ontwikkeld
- De richting van de kracht wordt gedefinieerd door de coördinaathoeken  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$

# Evenwicht in drie dimensies

Tabel 5.2 Verbindingen voor starre lichamen waarop driedimensionale krachtensystemen werken		
Soorten verbindingen	Reactie	Aantal onbekenden
(1)  kabel		Eén onbekende. De reactie is een kracht die van het onderdeel af in de richting van de kabel werkt.
(2)  verbinding op glad oppervlak		Eén onbekende. De reactie is een kracht die loodrecht op het oppervlak werkt in het contactpunt.
(3)  roloplegging		Eén onbekende. De reactie is een kracht die loodrecht op het oppervlak werkt in het contactpunt.
(4)  kogelscharnier		Drie onbekenden. De reacties zijn drie krachtcomponenten die loodrecht op elkaar staan.
(5)  aslager		Vier onbekenden. De reacties zijn twee kracht- en twee koppelmomentcomponenten die loodrecht op de as werken. <i>Opmerking:</i> de koppelmomenten worden in het algemeen niet aangebracht als het lichaam elders wordt gesteund. Zie de voorbeelden.

Tabel 5.2 Vervolg		
Soorten verbindingen	Reactie	Aantal onbekenden
(6)  aslager met vierkante as		Vijf onbekenden. De reacties zijn twee kracht- en drie koppelmomentcomponenten. <i>Opmerking:</i> De koppelmomenten worden in het algemeen niet aangebracht als het lichaam elders wordt gesteund. Zie de voorbeelden.
(7)  druklager		Vijf onbekenden. De reacties zijn drie kracht- en twee koppelmomentcomponenten. <i>Opmerking:</i> De koppelmomenten worden in het algemeen niet aangebracht als het lichaam elders wordt gesteund. Zie de voorbeelden.
(8)  penscharnier		Vijf onbekenden. De reacties zijn drie kracht- en twee koppelmomentcomponenten. <i>Opmerking:</i> De koppelmomenten worden in het algemeen niet aangebracht als het lichaam elders wordt gesteund. Zie de voorbeelden.
(9)  bladscharnier		Vijf onbekenden. De reacties zijn drie kracht- en twee koppelmomentcomponenten. <i>Opmerking:</i> De koppelmomenten worden in het algemeen niet aangebracht als het lichaam elders wordt gesteund. Zie de voorbeelden.
(10)  ingeklemde verbinding		Zes onbekenden. De reacties zijn drie kracht- en drie koppelmomentcomponenten.



# Evenwichtsvergelijkingen

## Vectoriële evenwichtsvergelijkingen

Bij evenwicht voldoet een star lichaam aan twee vergelijkingen in vectorvorm:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \sum \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

## Scalaire evenwichtsvergelijkingen

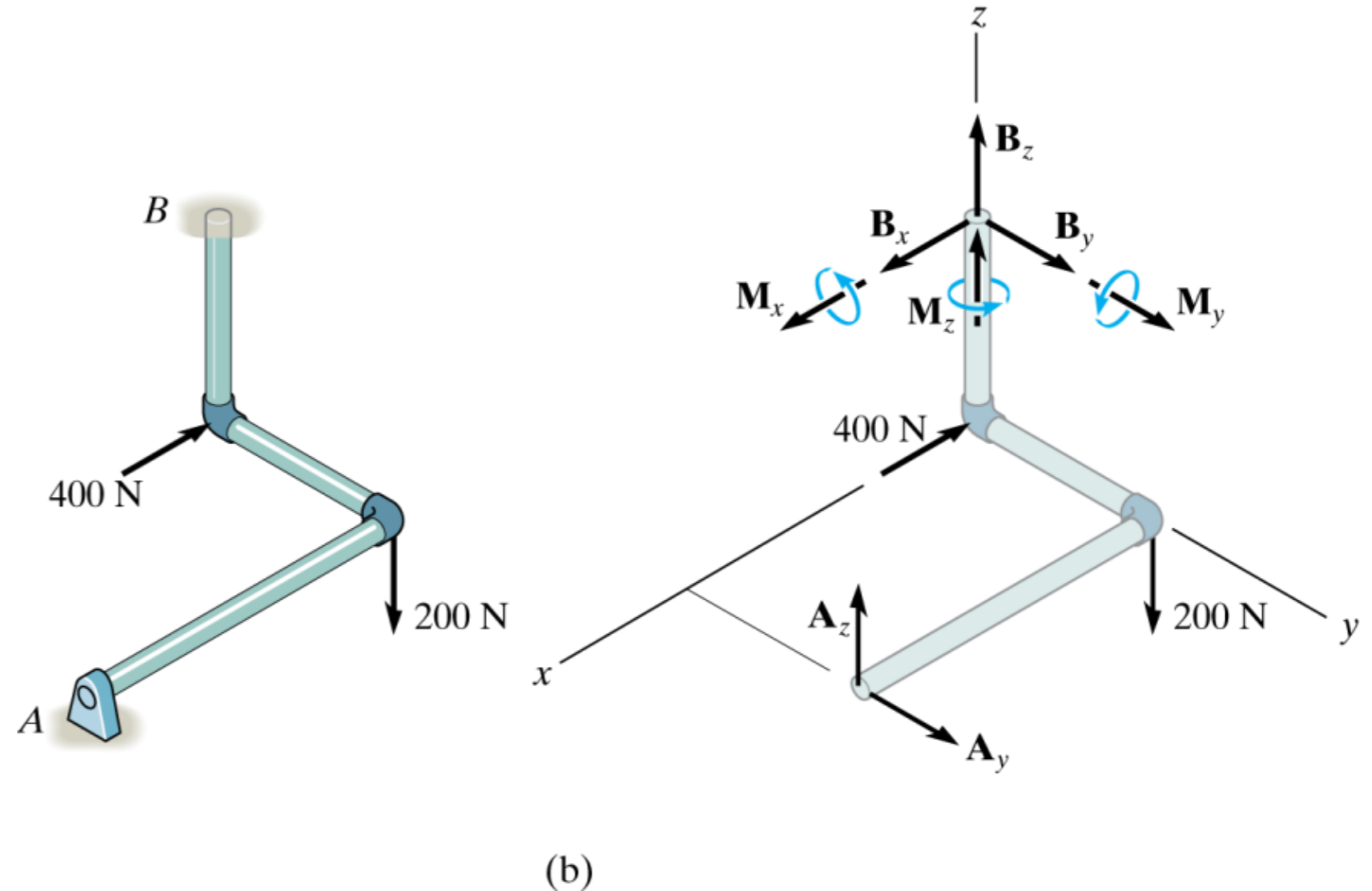
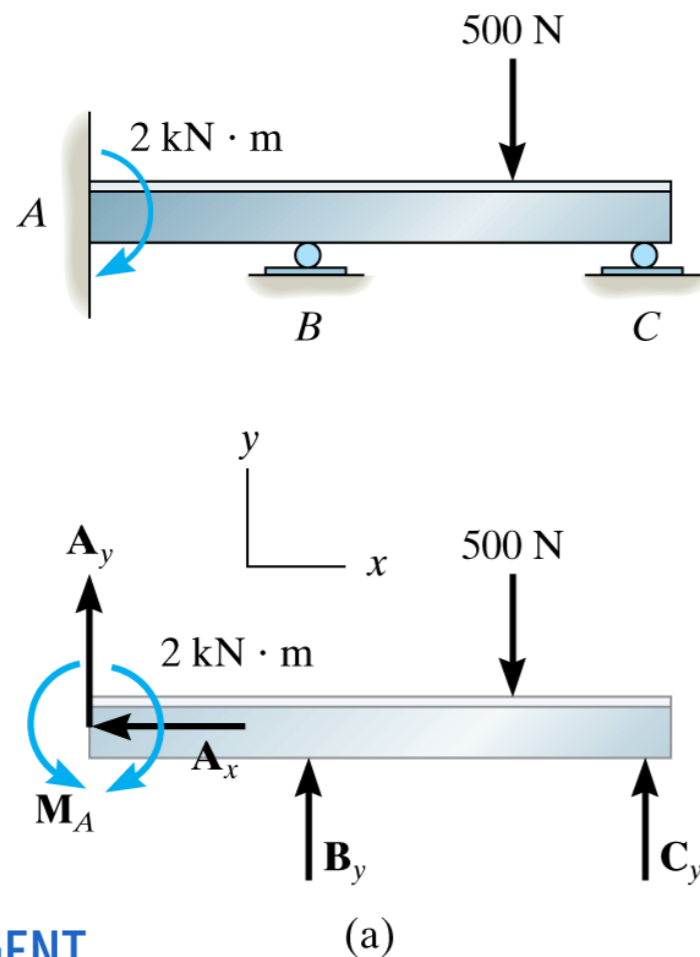
Als alle externe krachten en koppelmomenten worden uitgedrukt in cartesische vectorvorm

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F} &= \sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} + \sum F_z \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \sum \mathbf{M}_O &= \sum M_x \mathbf{i} + \sum M_y \mathbf{j} + \sum M_z \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

# Verbindingpunten: star lichaam

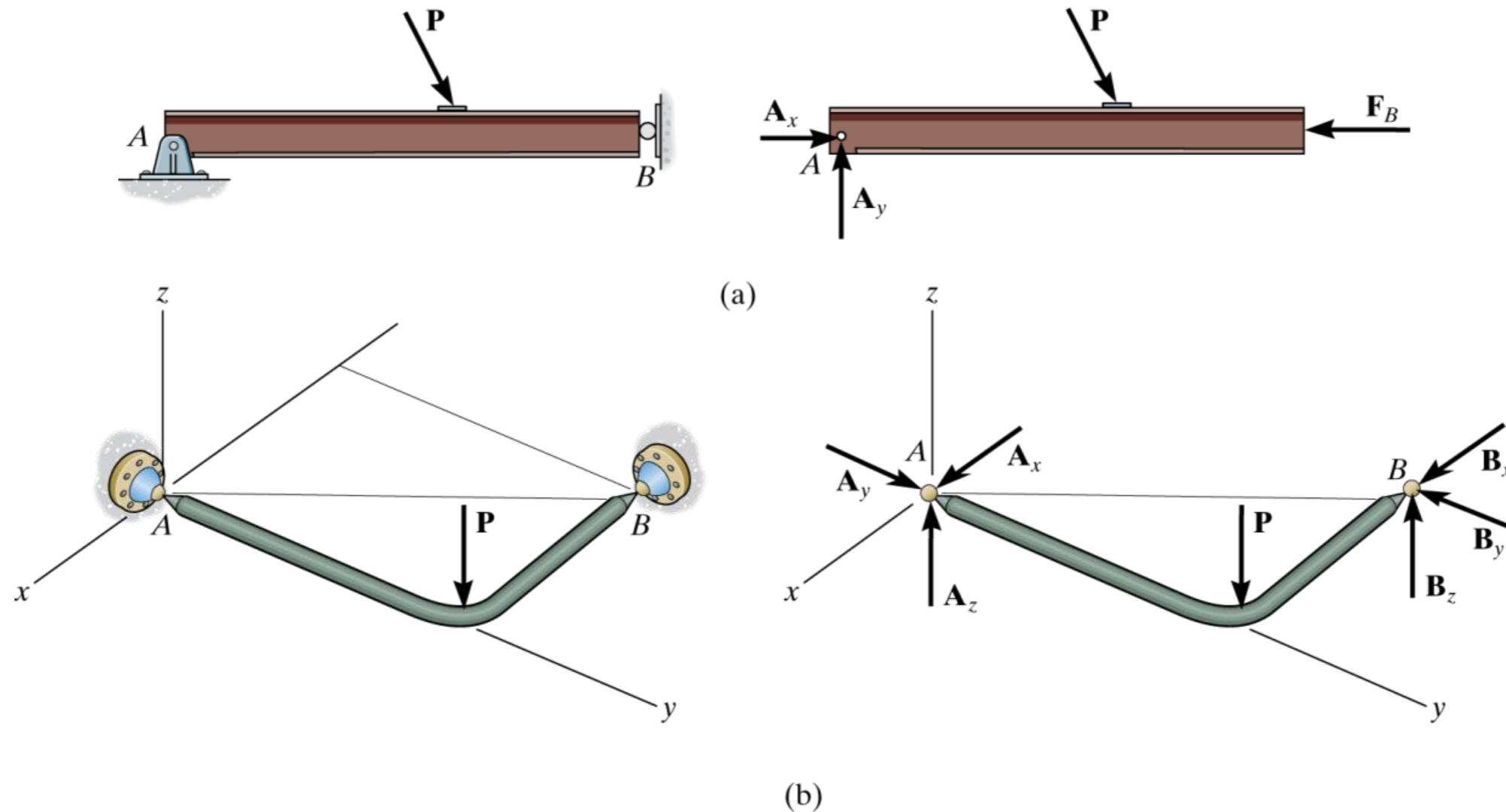
## Overtollige verbindingpunten

- Meer steunpunten dan nodig voor evenwicht
- Statisch onbepaald: meer onbekende belastingen dan evenwichtsvergelijkingen



# Verbindingspunten: star lichaam

- Instabiliteit door onjuiste verbindingen bij de steunpunten
- Wanneer de werklijnen van alle reactiekrachten door dit punt gaan, is het lichaam niet op de juiste manier verbonden



# Verbindingspunten: star lichaam

## **Analyseprocedure**

### *Vrijlichaamsschema*

- Maak een schets van de vorm van het lichaam
- Teken alle krachten en koppelmomenten die op het lichaam werken
- Geef bij alle onbekende componenten een positieve richting aan
- Vermeld de afmetingen van het lichaam die noodzakelijk zijn voor het berekenen van de momenten van de krachten

# Verbindingspunten: star lichaam

## **Analyseprocedure**

### *Evenwichtsvergelijkingen*

- Pas de zes scalaire of de vectoriële evenwichtsvergelijkingen toe
- Voor dit doel mag elke willekeurige set niet-orthogonale assen worden gekozen
- Kies de richting van een as voor momentensommatie zodanig dat deze de werklijnen van zo veel mogelijk onbekende krachten snijdt

# Verbindingspunten: star lichaam

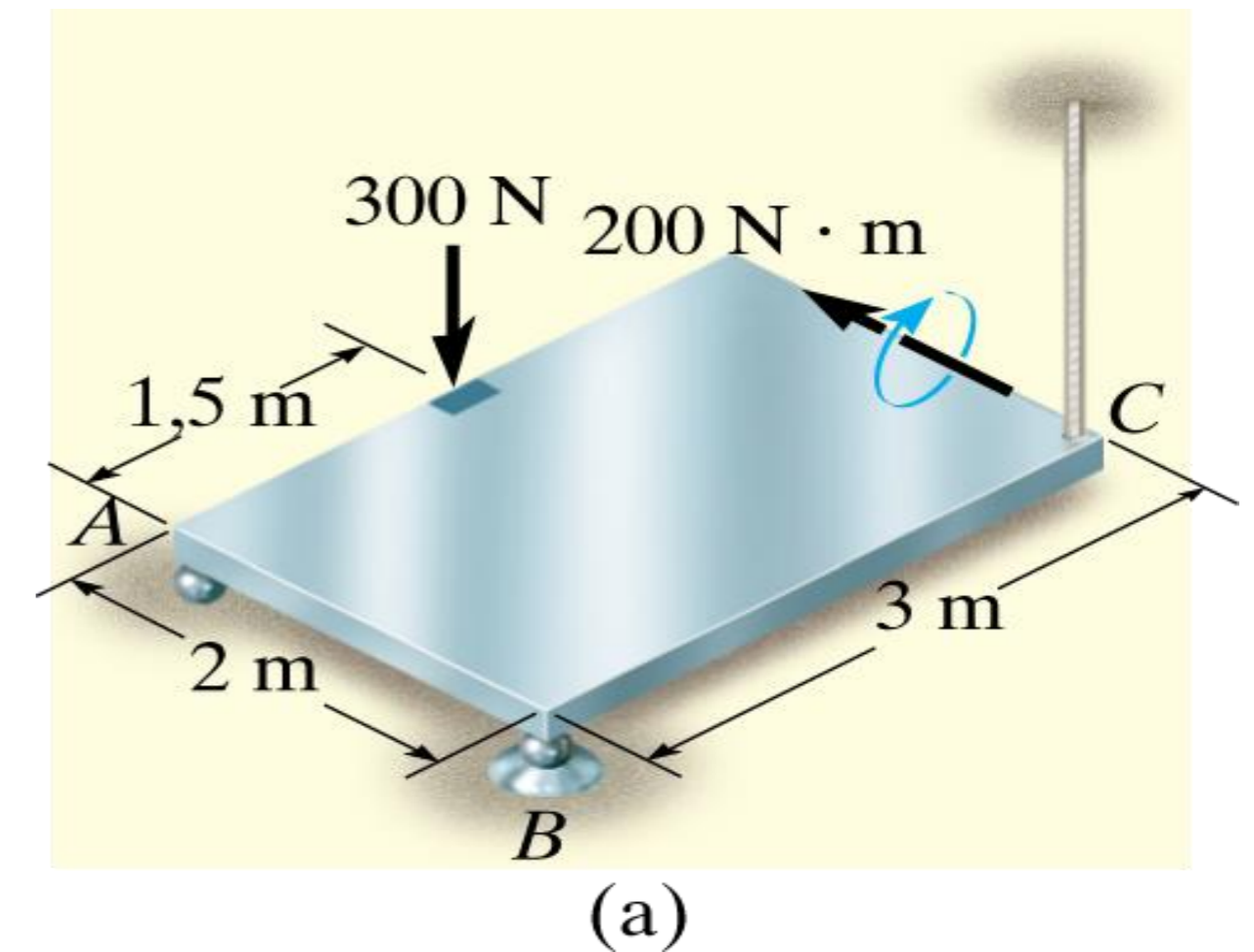
## Om te onthouden!

- Teken bij het oplossen van een evenwichtsvraagstuk altijd eerst het vrijlichaamsschema.
- Wanneer een verbinding *translatie voorkomt* van een lichaam in een specifieke richting, dan oefent de verbinding een kracht uit op het lichaam in die richting.
- Wanneer een steun *rotatie rond een as verhindert*, dan oefent de verbinding een koppelmoment uit op het lichaam om de as.
- Het vraagstuk is statisch onbepaald wanneer een lichaam aan meer onbekende reacties is onderworpen dan het aantal evenwichtsvergelijkingen dat beschikbaar is.
- Een stabiel lichaam vereist dat de werklijnen van de reactiekrachten nergens een gemeenschappelijke as snijden en niet evenwijdig aan elkaar lopen.

# Verbindingspunten: star lichaam

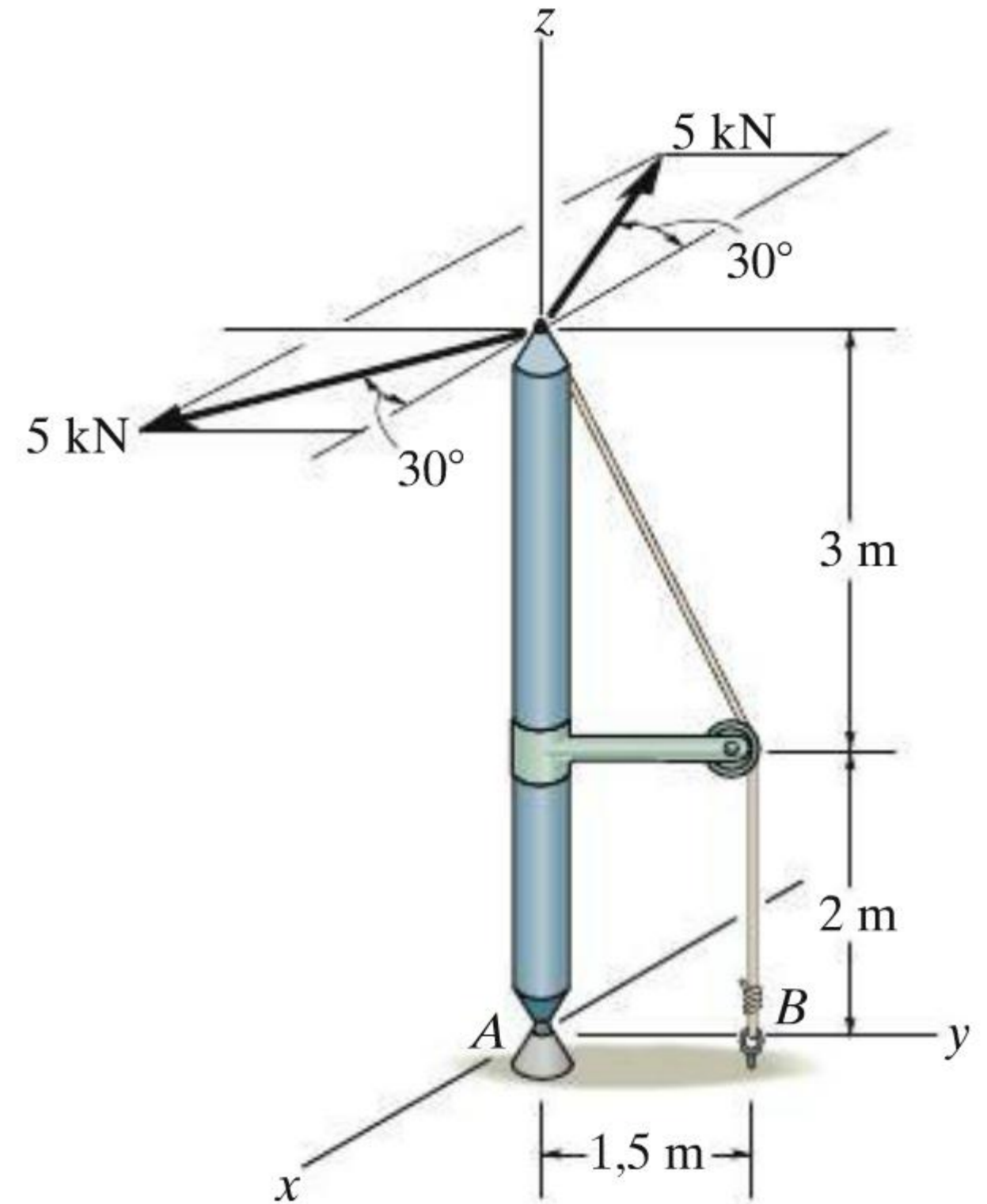
- Voorbeeld 5.15

De homogene plaat heeft een massa van 100 kg en is langs de randen onderhevig aan een kracht en een koppelmoment. Als de plaat in het horizontale vlak wordt ondersteund door een roloplegging in  $A$ , een kogelscharnier in  $B$  en een koord in  $C$ , bepaal dan de componenten van de reactiekrachten bij de steunpunten.



# Oefening

**\*5.80.** De giek wordt gedragen door een kogelscharnier in  $A$  en een tuikabel in  $B$ . Als de belasting van  $5\text{ kN}$  in een vlak evenwijdig aan het  $x$ - $y$ -vlak ligt, bepaal dan de  $x$ -,  $y$ - en  $z$ -componenten van de reactiekracht in  $A$  en de trekkracht in de kabel in  $B$ .





# Quiz

- In een vrijlichaamsschema worden geen interne krachten aangegeven omdat de interne krachten \_\_\_\_\_.
  - a) gelijk aan nul zijn
  - b) gelijk en tegengesteld zijn en de berekeningen niet beïnvloeden
  - c) verwaarloosbaar klein zijn
  - d) niet van belang zijn

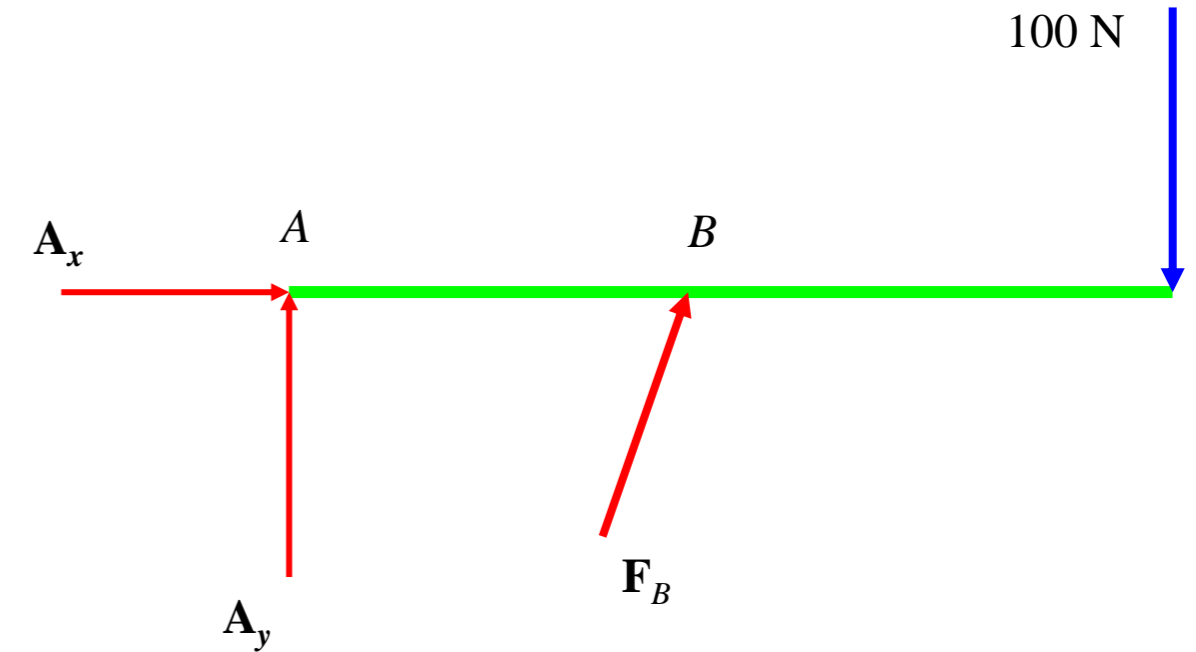
# Quiz

- Met welke evenwichtsvergelijking kun je  $F_B$  rechtstreeks bepalen?

A)  $\sum F_x = 0$       B)  $\sum F_y = 0$

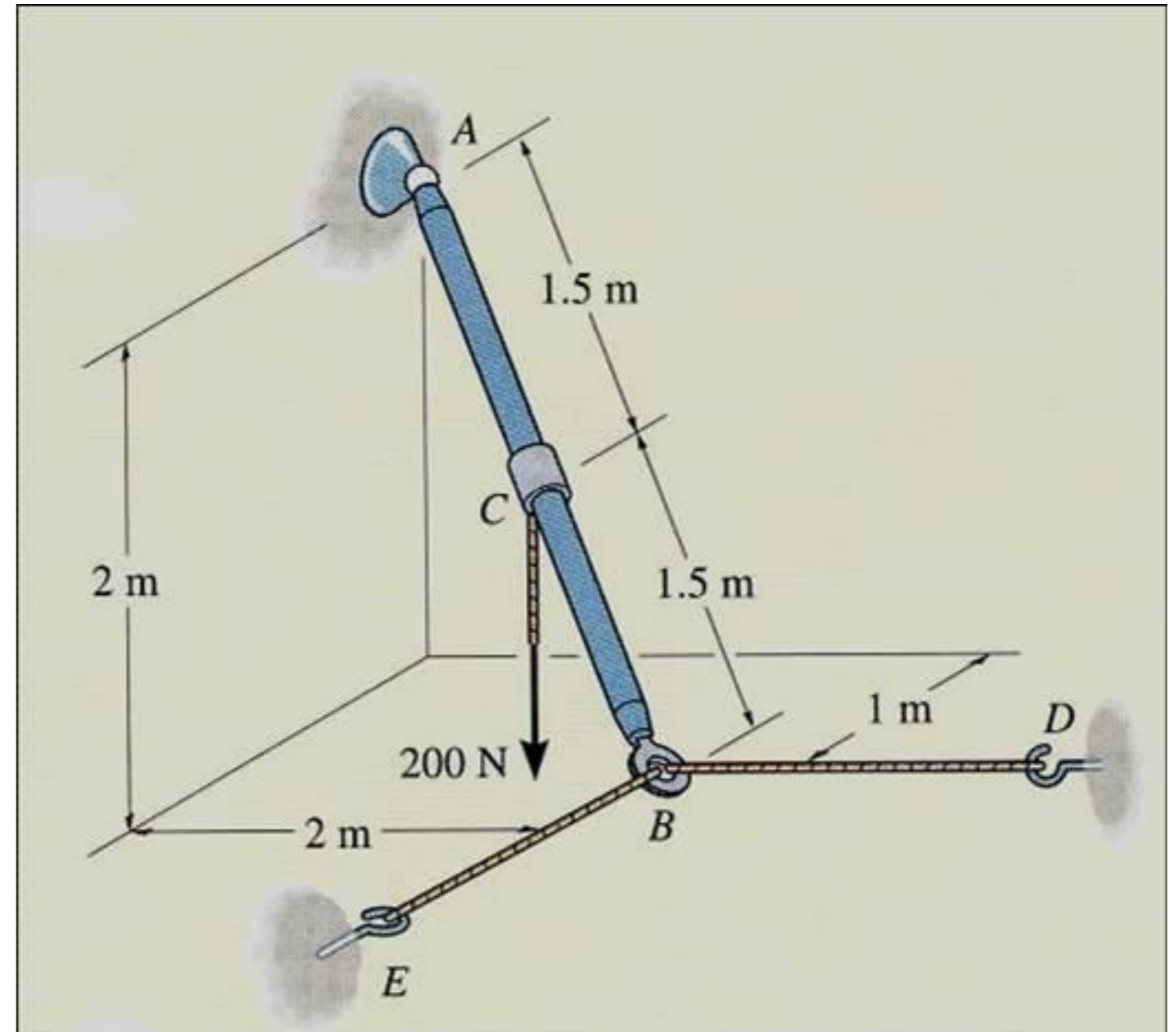
C)  $\sum M_A = 0$

D) elk van deze mogelijkheden



# Quiz

- De staaf  $AB$  wordt ondersteund door twee kabels in  $B$  en een kogelscharnier in  $A$ . Hoeveel onbekende steunpuntreacties zijn er in dit probleem?
- A) 5 reactiekrachten en 1 reactiemoment
- B) 5 reactiekrachten
- C) 3 reactiekrachten en 3 reactiemomenten
- D) 4 reactiekrachten en 2 reactiemomenten



# Quiz

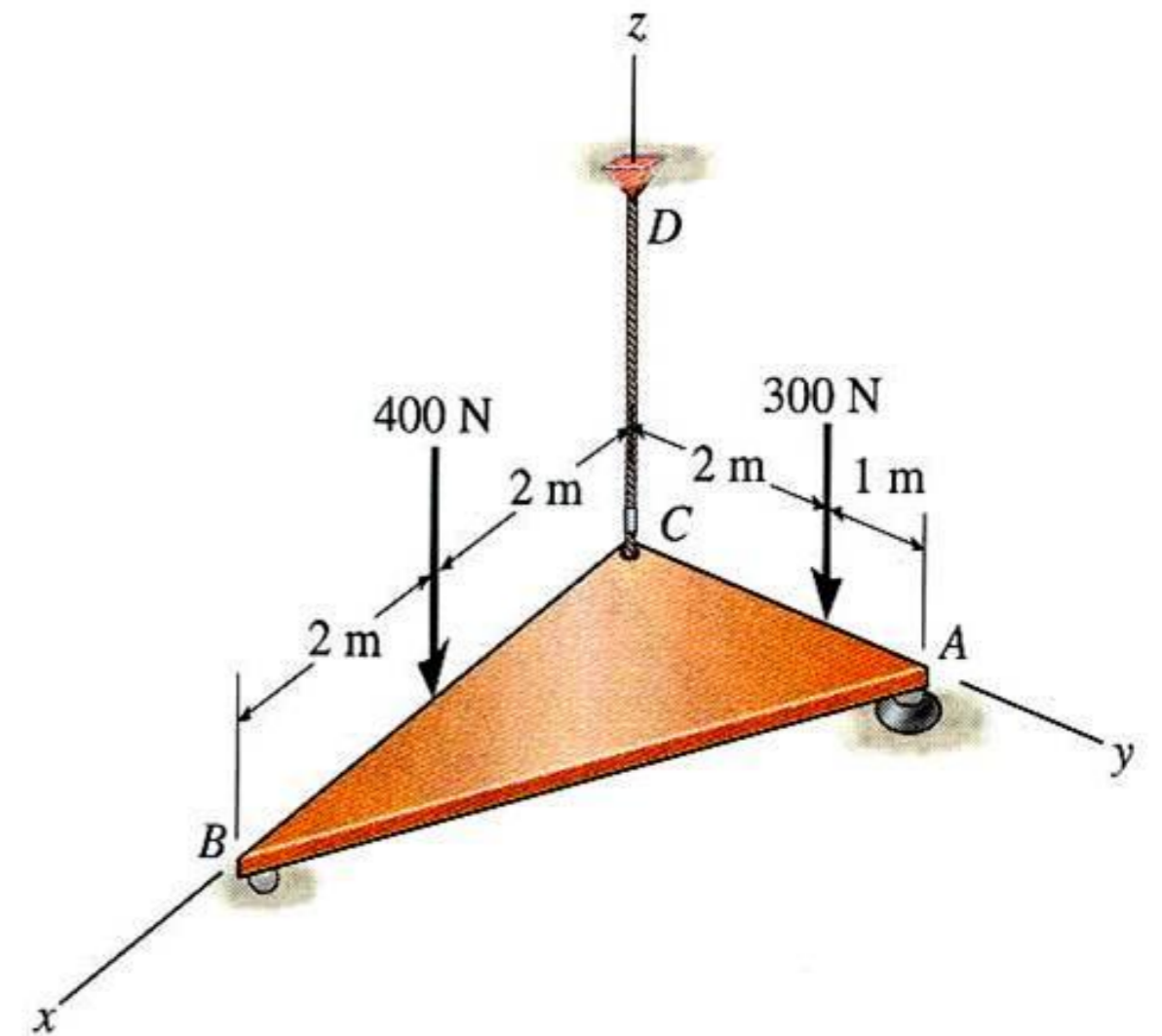
• Wat is de eenvoudigste manier om de reactiekracht  $B_z$  te bepalen?

A) Scalaire vergelijking  $\sum F_z = 0$

B) Vectorvergelijking  $\sum \mathbf{M}_A = \mathbf{0}$

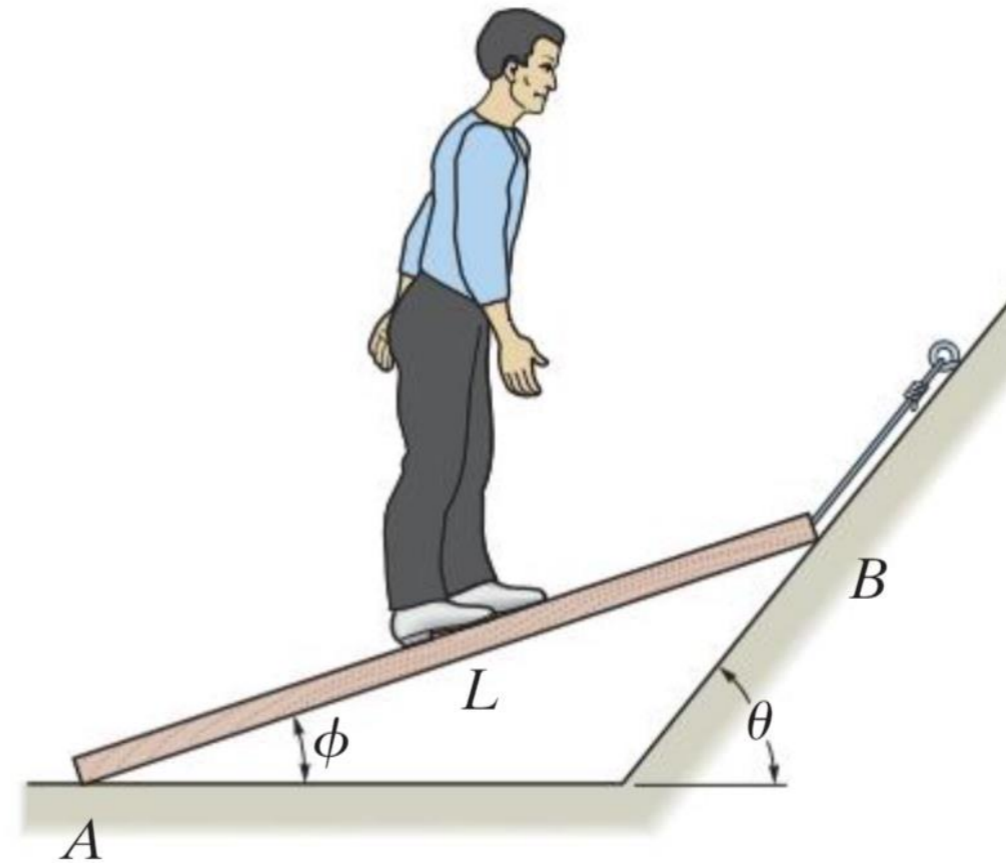
C) Scalaire vergelijking  $\sum M_z = 0$

D) Scalaire vergelijking  $\sum M_y = 0$



# Extra Oefeningen

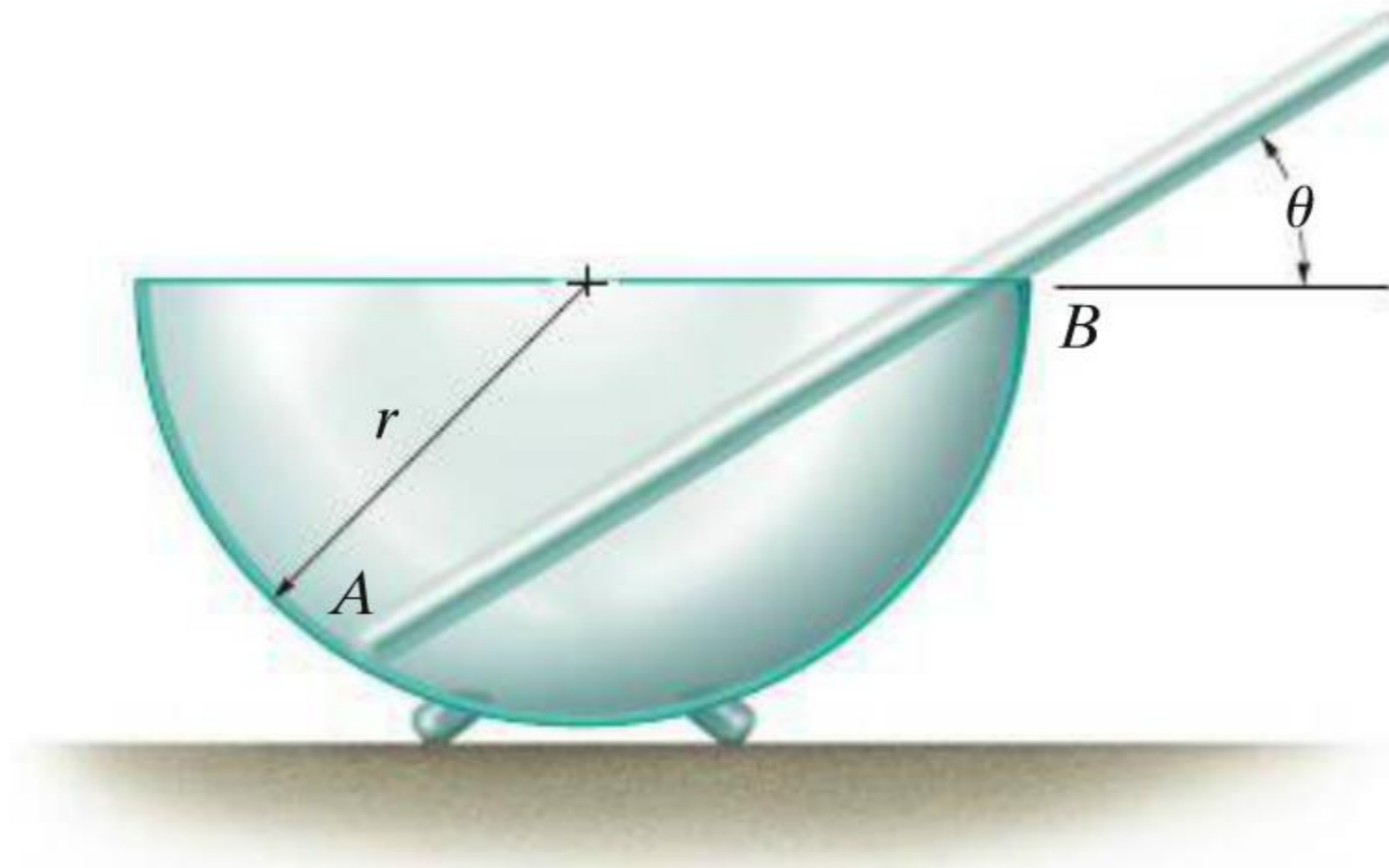
**\*5.16.** De man heeft een gewicht  $W$  en staat op het midden van de plank. De vlakken bij  $A$  en  $B$  zijn glad. Bepaal de trekkkracht in het touw in termen van  $W$  en  $\theta$ .



Vraagstuk 5.16

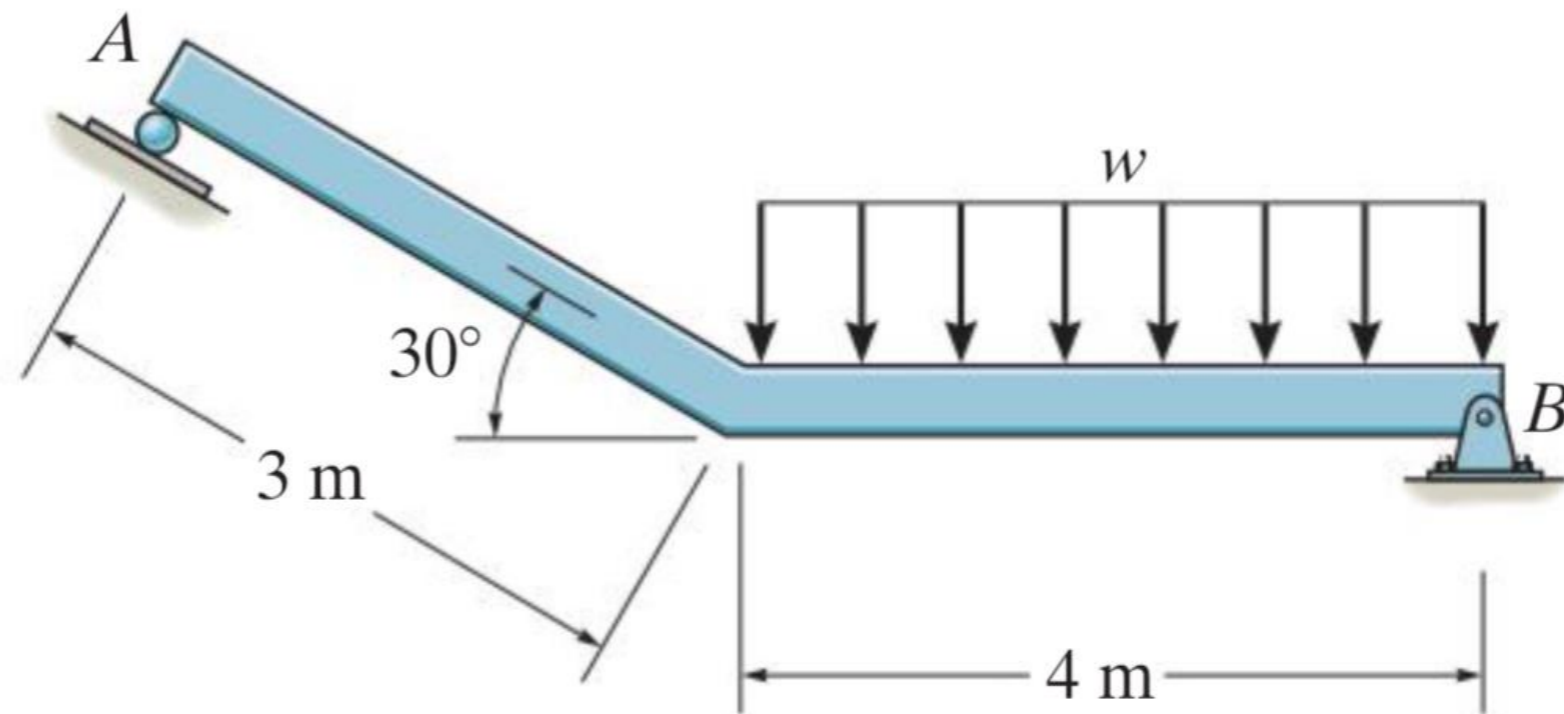
# Extra Oefeningen

**5.18.** Een homogene glazen staaf met lengte  $L$  wordt in de gladde halfbolvormige schaal met straal  $r$  geplaatst. Bepaal de hellingshoek  $\theta$  bij evenwicht.



# Extra Oefeningen

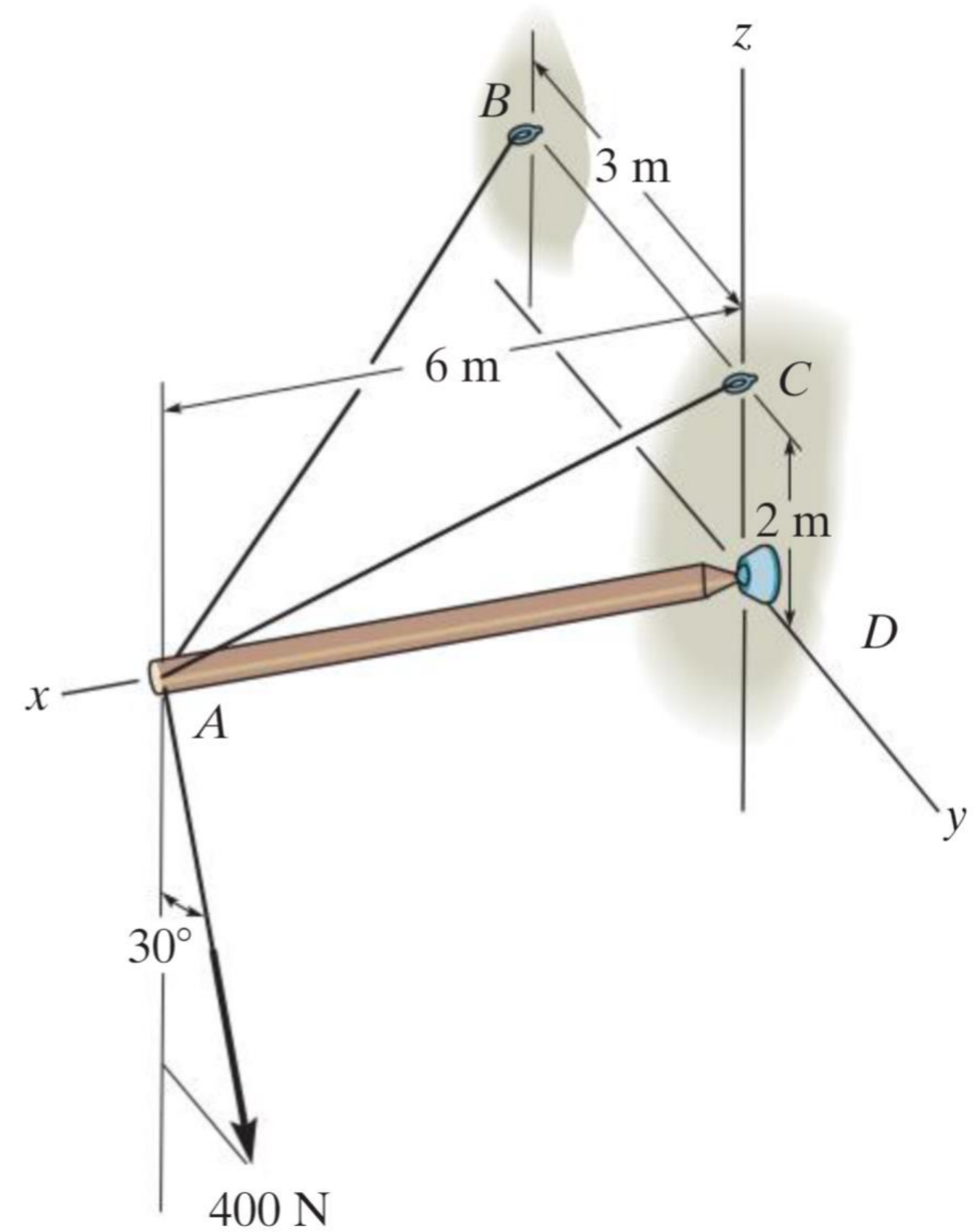
- 5.23.** De roloplegging bij  $A$  en de penoplegging bij  $B$  kunnen met respectievelijk maximaal 4 en maximaal 8 kN worden belast. Bepaal dan de maximale intensiteit van de verdeelde belasting  $w$ , uitgedrukt in kN/m, zodanig dat de ondersteuning niet bezwijken.



Vraagstukken 5.22/23

# Extra Oefeningen

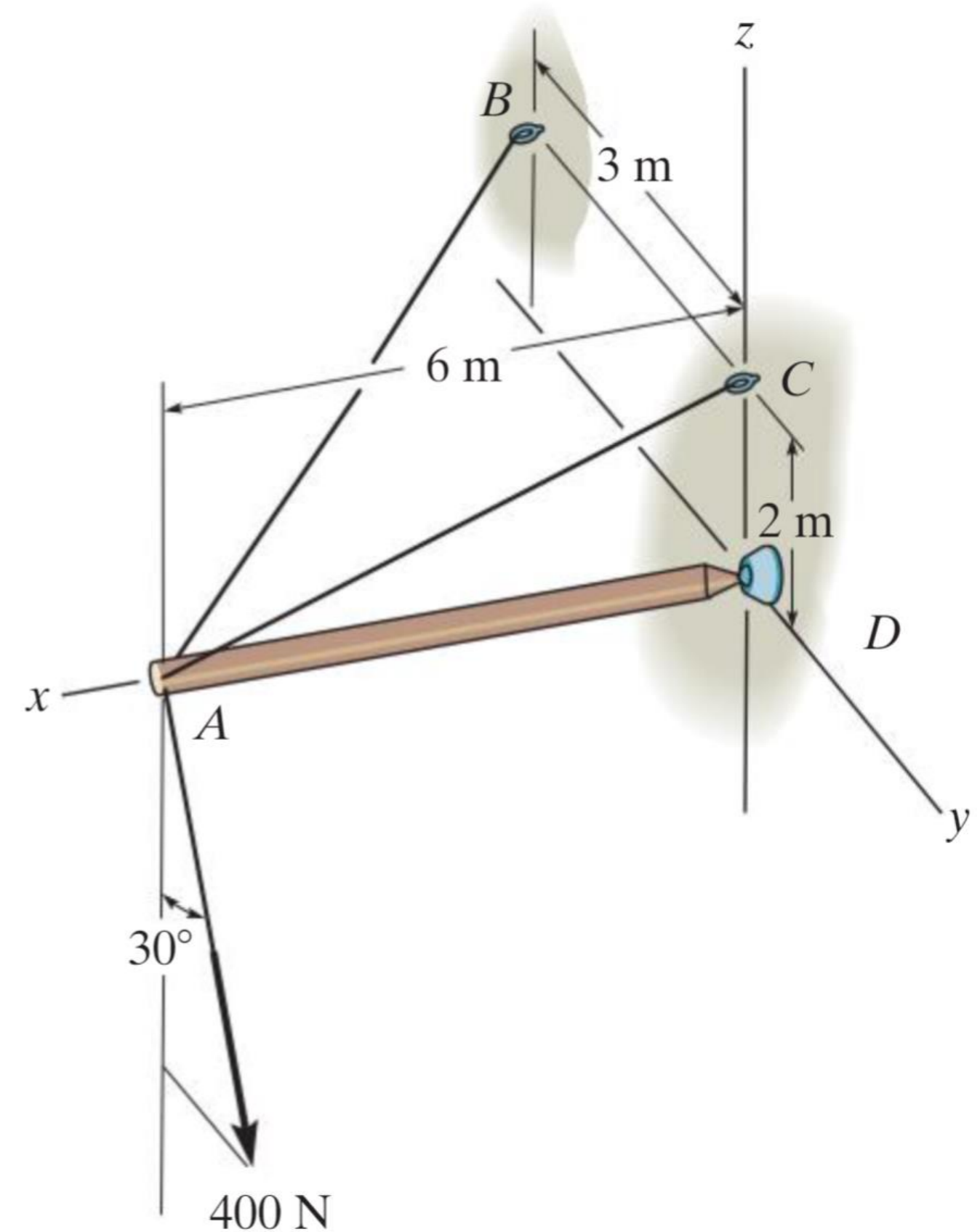
**\*5.64.** Bepaal de benodigde trekkkracht in elke kabel en de componenten van de reactiekrachten bij  $D$  om de belasting te kunnen afsteunen.





# Extra Oefeningen

**\*5.64.** Bepaal de benodigde trekkracht in elke kabel en de componenten van de reactiekrachten bij  $D$  om de belasting te kunnen afsteunen.



# Extra Oefeningen

**5.85.** Het uithangbord heeft een massa van 100 kg en het massamiddelpunt bevindt zich in  $G$ . Bepaal de  $x$ -,  $y$ - en  $z$ -component van de reactiekracht in het kogelgewricht  $A$  en de trekkracht in de draden  $BC$  en  $BD$ .

