Hoofdstuk 6: Afgeleiden

Definitie afgeleide

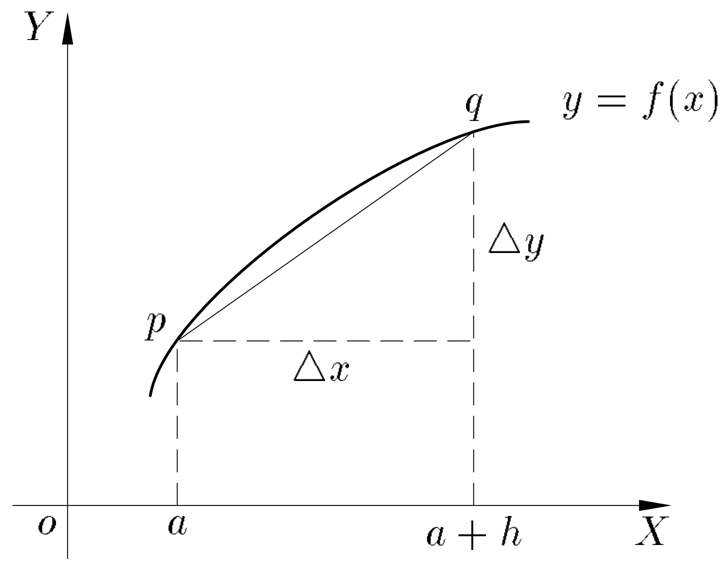
Is $a \in \text{dom} f$ en $x \in O_a$:
dan is **differentiequotiënt** van f in a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$: de richtingscoëfficiënt van de koorde pq.

Indien $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ bestaat en eindig is, dan zegt men dat f **afleidbaar** is in a en deze waarde noteert men door $f'(a)$ of $Df(a)$.

https://www.geogebra.org/m/tRWkmXwr



Definitie afgeleide

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=Df(x)=f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$$

$$f'_+(a)=\lim_{x\overset{>}{\to} a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\qquad\qquad f'_-(a)=\lim_{x\overset{<}{\to} a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Meetkundige betekenis

Zijn $p(a,f(a))$ en $q(a+h,f(a+h))$ punten van de kromme $y=f(x)$
$\Rightarrow \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ = de **richtingscoëfficiënt** van de rechte pq.

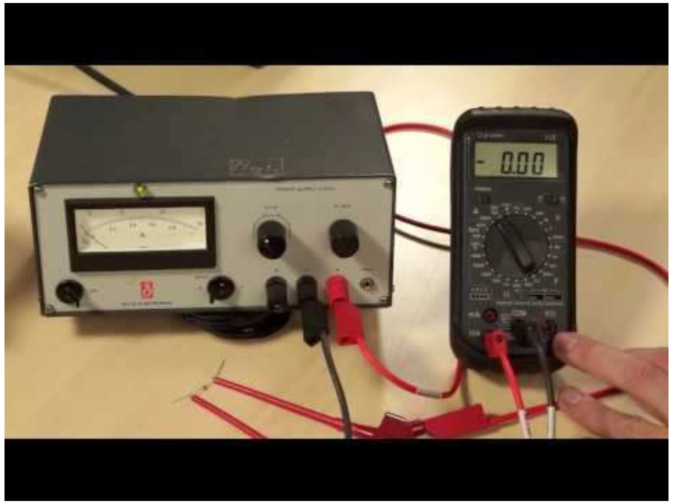
Als $h\to 0$, dan convergeert de rechte pq naar de raaklijn in p.
$\Rightarrow f'(a)$ = de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan $y=f(x)$
. in het punt $(a,\ f(a))$

Indien $f'(a)=0$ (resp. ∞) dan is de raaklijn $/\!\!/$ X-as (resp. $/\!\!/$ Y-as).

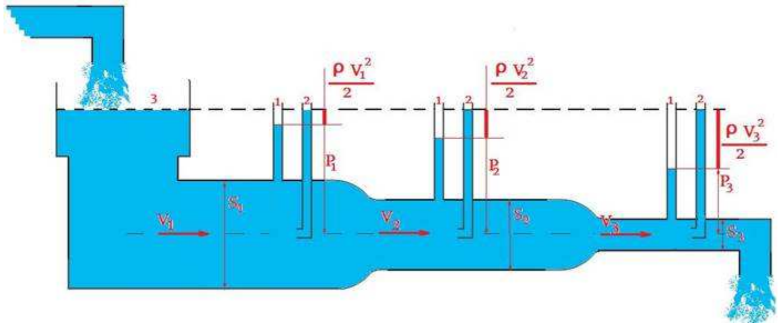
Fysische toepassingen van de afgeleide

snelheid $v = \frac{ds}{dt}$ (s = afgelegde weg)

versnelling $a = \frac{dv}{dt}$



stroomsterkte $i = \frac{dq}{dt}$ (q = lading)



debiet $d = \frac{dV}{dt}$ (V = volume)

Verband afleidbaarheid en continuïteit

Stelling: f afleidbaar in $a \quad \Rightarrow \quad f$ continu in a

Bewijs

Uit de afleidbaarheid van f in a volgt dat $f'(a) \in \mathbb{R}$ (dus niet ∞). Neemt men in

$$f(a+h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h + f(a)$$

de limiet voor $h \to 0$ dan is $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a)$, wat de continuïteit bevestigt. $\square$

Wat stelt grotere eisen aan een functie: afleidbaarheid of continuïteit?

Tip: bestudeer $y = |x|$ in het punt o.

Stelling van Fermat

Is f afleidbaar in c zo dat

$$\forall x \in O_c \setminus \{c\} : \quad f(x) < f(c) \qquad \text{of} \qquad \forall x \in O_c \setminus \{c\} : f(x) > f(c)$$

dan geldt $f'(c) = 0$.

Bewijs

We bewijzen enkel het eerste geval.
Links van c is:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \quad \text{dus} \quad \lim_{x \overset{<}{\to} c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; f'_-(c) \geq 0$$

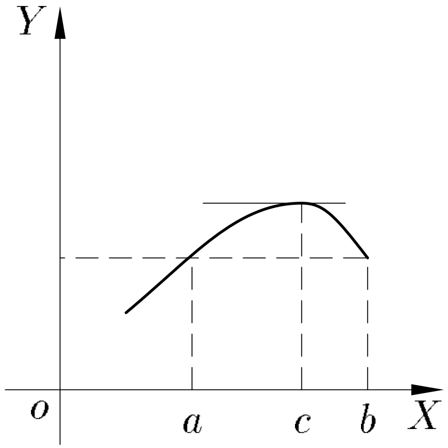
rechts van c is:

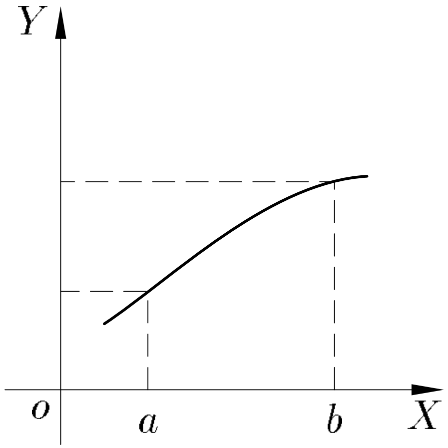
$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0 \quad \text{dus} \quad \lim_{x \overset{>}{\to} c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; f'_+(c) \leq 0$$

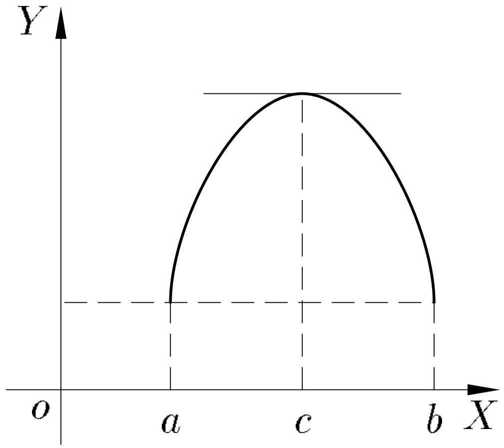
Vermits de functie afleidbaar is in c zijn linker en rechterafgeleide gelijk en geldt $f'(c) = 0$.

Stelling van Rolle

Is f continu over $[a, b]$ en afleidbaar over $]a, b[$ zodat $f(a) = f(b)$ dan $\exists c \in]a, b[$ zodat $f'(c) = 0$.



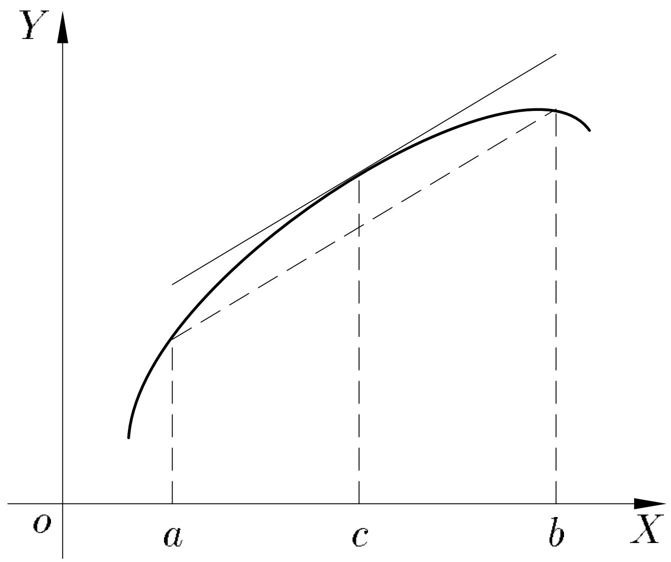




Middelwaardestelling van Lagrange

Is de functie f continu over $[a,b]$ en afleidbaar over $]a,b[$ dan $\exists c \in]a,b[$ zodat

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$$



Meetkundige betekenis

Er bestaat minstens één punt in $]a,b[$ waar de raaklijn evenwijdig is met de koorde die $(a, f(a))$ met $(b, f(b))$ verbindt.

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x + \vartheta\,\Delta x) \cdot \Delta x$$

met $0 < \vartheta < 1$

Rekenregels bij afgeleiden

1. Zijn f en g twee afleidbare functies dan geldt, binnen het domein:

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f-g)' = f' - g'$$

$$(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$$

$$(k\,f)' = k\,f', \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2} = (f\,g^{-1})'$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

2. Is f afleidbaar in a en $f'(a) \neq 0$, dan is f^{inv} afleidbaar in $b = f(a)$ en geldt:

$$(f^{inv})'(b) = \frac{df^{inv}(b)}{dy} = \frac{1}{f'(a)}$$

Rekenregels bij afgeleiden

3. **Kettingregel**: Is g afleidbaar in x en f afleidbaar in $y = g(x)$ dan is $z = f \circ g$ afleidbaar in x en geldt:

$$\frac{d(f \circ g)(x)}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{dg(x)}{dx} \quad \text{of} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

4. Indien een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ te schrijven is als $f(t) = u(t) + j\,v(t)$ met u en v twee reële functies, dan geldt $\frac{df}{dt} = \frac{du}{dt} + j\,\frac{dv}{dt}$, m.a.w. $\mathrm{Re}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{du}{dt}$ en $\mathrm{Im}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{dv}{dt}$.

Afgeleide van elementaire functies

$\forall k \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$:

$$(k)' = 0$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\mathrm{Bgsin}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\mathrm{Bgcotg}x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$$

$$(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$$

$$(x^k)' = k\,x^{k-1} \qquad k \neq 0$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\mathrm{cotg}x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

Afgeleide van elementaire functies

$\forall k \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$:

$$(\mathrm{Bgcos} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\mathrm{Bgtg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(a^x)' = (\ln a)\, a^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(\ln a)\, x}$$

$$(\mathrm{ch} x)' = \mathrm{sh} x$$

$$(\coth x)' = \frac{-1}{\mathrm{sh}^2 x}$$

Hogere orde afgeleiden

Is f een functie waarvan de eerste orde afgeleide ($f' = Df = \frac{df}{dx}$) afleidbaar is in een omgeving O dan:

$$\forall x \in O : \qquad f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = D^2 f(x) = \frac{d(f'(x))}{dx}$$

Dit noemt men de 2de orde afgeleide.

Voorbeeld 1

$D^2 \sin^2 x = D(D \sin^2 x) = D(\sin 2x) = 2 \cos 2x$

Uitbreiding naar $n$de orde ($n > 1$)

$$D^n f = D(D^{n-1} f) \quad \text{of} \quad \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) = f^{(n)}(x)$$

Differentiaal van eerste orde

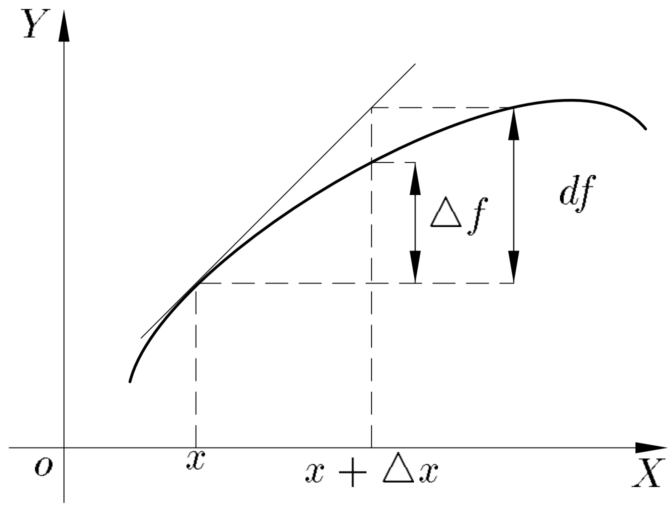
Voor f continu en afleidbaar in een omgeving van x noemen we de **differentiaal** van f in x:

$$df(x) = f'(x) \cdot dx$$

De rekenregels zijn dezelfde als die van de afgeleiden.

Meetkundige betekenis differentiaal van eerste orde:
Indien Δx voldoende klein is:

$$df \approx \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$



De aangroei Δf benaderen door df is de aangroei meten tot op de raaklijn i.p.v. op de kromme.

Differentialen van hogere orden

Bij constante dx kan men de differentiaal van de tweede orde berekenen:

$$d^2f = d(df) = d(f'(x)\,dx) = df'(x) \cdot dx + f'(x) \cdot d(dx) = f''(x) \cdot dx \cdot dx$$

en we noteren: $d^2f = f''(x)\,(dx)^2$.
Deze uitdrukking geeft de verklaring voor de notatie van de tweede afgeleide $f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}$.

Algemeen, voor $n > 1$: $d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x)) = f^{(n)}(x)(dx)^n$

Impliciet afleiden

Voor een kromme gegeven in impliciete vorm $F(x, y) = 0$ bepalen we y' als volgt:

- leid de uitdrukking term per term af naar x,
- voor factoren afhankelijk van y gebruik de kettingregel:

$$\frac{dg(y)}{dx} = \frac{dg(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dg(y)}{dy} \cdot y'$$

Logaritmisch afleiden

Ga over van $y = f(x)$ naar $\ln|y| = \ln|f(x)|$ en leid beide leden af.

Deze methode kan gebruikt worden bij een veralgemeende machtsfunctie.

Regel van de l'Hôpital voor het berekenen van limieten

Wegwerken van onbepaaldheden $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞ en ∞^0

Zijn f en g afleidbaar en $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ of $= \dfrac{\infty}{\infty}$ dan is

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{als het rechterlid bestaat.}$$

Opmerkingen Regel van de l'Hôpital

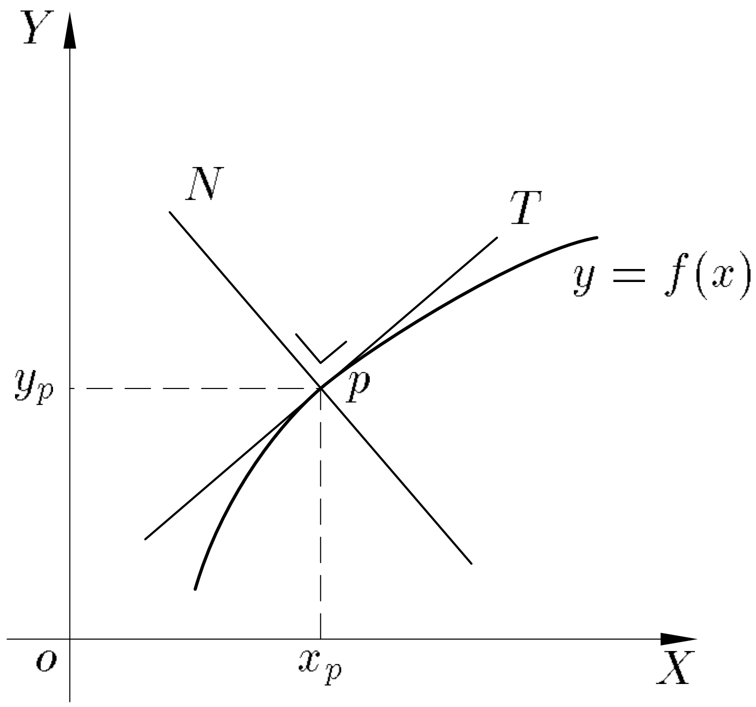
1. Soms is het nodig de regel van de l'Hôpital meerdere keren toe te passen.
2. Het geval $0 \cdot \infty$ moet herleid worden naar $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ om de regel van de l'Hôpital te kunnen toepassen.
3. De onbepaaldheid $\infty - \infty$ moet eerst als een breuk geschreven worden. Bekomt men $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ dan kan men de regel van de l'Hôpital toepassen.
4. Bekomt men onbepaaldheden van het type $0^0, \; 1^\infty, \; \infty^0$ dan schrijft men eerst de veralgemeende machtsfunctie $u(x)^{v(x)}$ als $e^{v(x)\,\ln u(x)}$.

Raaklijn en normaal in een punt van een kromme

Voor een punt $p(x_p, y_p)$ van de kromme is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in p aan de kromme gelijk aan y'_p. Deze van de normaal (rechte loodrecht op de raaklijn) is $-\frac{1}{y'_p}$, vandaar:

Raaklijn: $y - y_p = y'_p\,(x - x_p)$

Normaal: $y - y_p = -\dfrac{1}{y'_p}\,(x - x_p)$

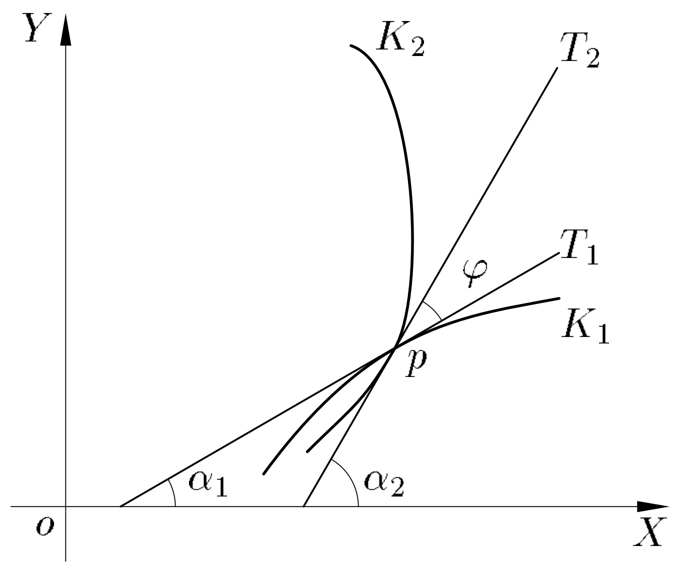


Hoek tussen twee krommen

Voor snijpunt(en) p van K_1 en K_2 is:
$\varphi = (\widehat{K_1, K_2}) = (\widehat{T_1, T_2})$
met T_1 (T_2) de raaklijn aan K_1 (K_2) in p.
Omdat $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ is

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_1 \mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{(y_2')_p - (y_1')_p}{1 + (y_1')_p (y_2')_p}$$

waarbij $(y_1')_p$ $((y_2')_p)$ de afgeleide van y naar x voorstelt van K_1 (K_2) genomen in p.



Afgeleide als maat voor de aangroei

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$ de gemiddelde aangroei voor van de functie f over het interval $[x, x + \Delta x]$.

$f'(x) =$ de relatieve aangroei voor van $f(x)$ t.o.v. het argument x in de omgeving van x.

Voorbeeld afgeleide als maat van aangroei

Gegeven: een stang ab met lengte 5m ($a \in X$-as; $b \in Y$-as). Het uiteinde a verplaatst zich langs de X-as in positieve zin met een snelheid van 2m/s.

Gevraagd: de snelheid waarmee het andere uiteinde b daalt als $|oa| = 3$m.

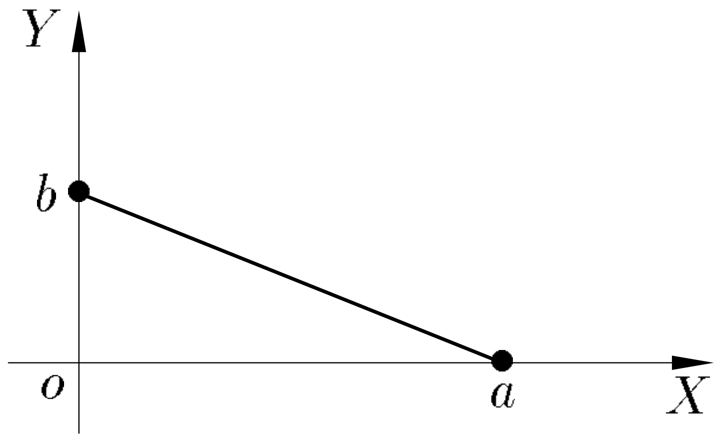
Oplossing:

$|ab| = 5\text{m} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}\,\frac{dx}{dt}$$

Voor het punt met abscis $x = 3$ is $\frac{dx}{dt} = 2$ en is:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=3} = -\frac{3}{\sqrt{25 - 9}}\,2 = -\frac{3}{2}\text{m/s}$$



Voorbeeld afgeleide als maat van aangroei

De straal van een bol neemt uniform toe met een snelheid van 5cm/s. Met welke snelheid nemen de oppervlakte en de inhoud van de bol toe op het moment dat $r = 50\,\mathrm{cm}$?

Oplossing: als $r = 50\,\mathrm{cm}$ is $\frac{dr}{dt} = 5$

Inhoud:

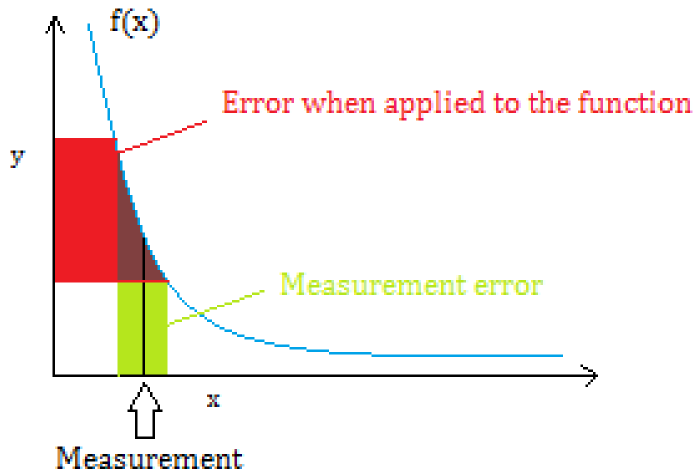
$$I = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dI}{dt}\right)_{r=50} = 50\,000\pi\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$$

Oppervlakte:

$$O = 4\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dO}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dO}{dt}\right)_{r=50} = 2\,000\pi\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$$

Toepassing in de foutentheorie

Is $y = f(x)$ en is de absolute fout op de meting x gelijk aan $\mathrm{AF}(x) = \Delta x$, dan is de absolute fout op het resultaat y: $\mathrm{AF}(y) = |f'(x)|\,\mathrm{AF}(x)$



Voorbeeld

Met $f(x) = x^2$ berekent men de oppervlakte van een vierkant met zijde x. Bereken de absolute fout voor de oppervlakte van een vierkant met zijde $5\,\mathrm{cm}$ en $\Delta x = 5\,\mathrm{mm}$.

$\mathrm{AF}(y) = 2\,x\,\mathrm{AF}(x) = 500\mathrm{mm}^2$

Stijgen, dalen

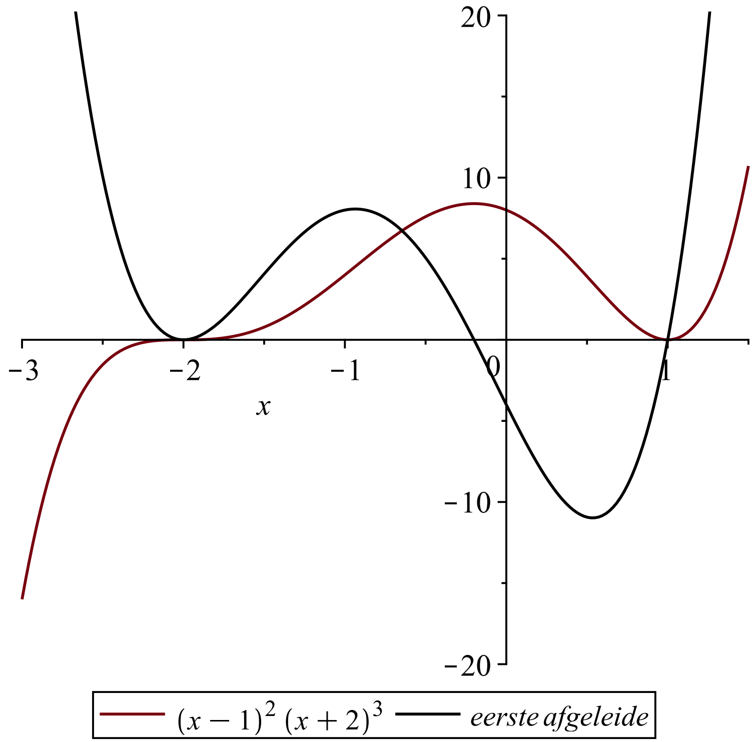
Een functie is **stijgend** in een interval $[a, b]$:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

Een functie is **strikt stijgend** in een interval $[a, b]$:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

De definities voor **(strikt) dalend** zijn analoog.



Is f afleidbaar in een omgeving O_a van a, dan

$f'(a) > 0 \Leftrightarrow f$ strikt stijgend in a

$f'(a) \geq 0 \Leftrightarrow f$ stijgend in a

$f'(a) < 0 \Leftrightarrow f$ strikt dalend in a

$f'(a) \leq 0 \Leftrightarrow f$ dalend in a

Extrema, maxima, minima

f heeft een **lokaal maximum** in $a \in \operatorname{dom} f$ als er een omgeving O_a van a bestaat waarvoor $\forall x \in (O_a \setminus \{a\} \cap \operatorname{dom} f): \quad f(x) < f(a)$.
De definitie voor een **lokaal minimum** is analoog.
Een **extremum** is een lokaal minimum of maximum.

Eigenschappen

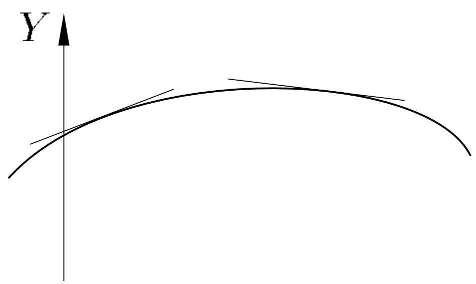
1. $f'(a) = 0 \rightarrow$ de raaklijn in het punt $(a, f(a)) \parallel X$-as.
   Wisselt f' van teken in O_a dan heeft f een extremum in a.
2. $f'(a) = \infty \rightarrow$ de raaklijn in het punt $(a, f(a)) \parallel Y$-as.
   Wisselt f' van teken in O_a dan heeft f een extremum in a.
3. Indien f continu is over $[a, b]$, dan bereikt f zijn grootste waarde in een maximum of in één der eindpunten, en bereikt f zijn kleinste waarde in een minimum of in één der eindpunten.

Convex, concaaf en buigpunten

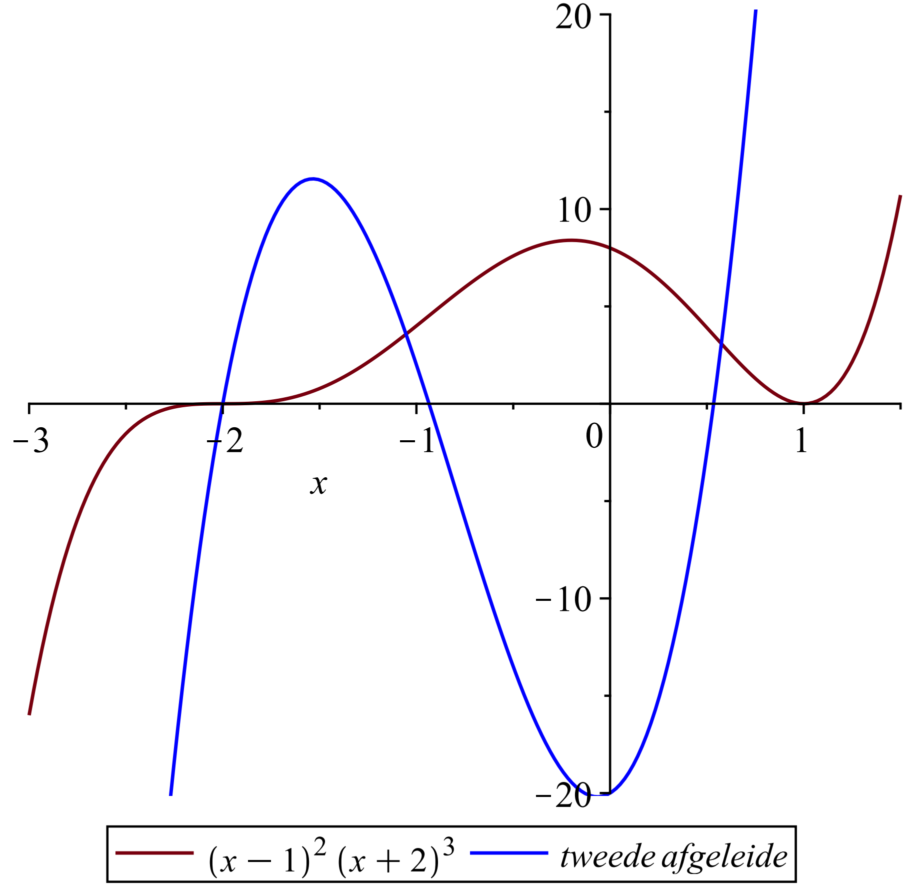
$$f''(x) > 0 \text{ over } [a,b] \Leftrightarrow f \text{ convex over } [a,b] \Leftrightarrow f' \text{ stijgt over } [a,b]$$

$$f''(x) < 0 \text{ over } [a,b] \Leftrightarrow f \text{ concaaf over } [a,b] \Leftrightarrow f' \text{ daalt over } [a,b]$$

f is convex



f is concaaf



Buigpunten

Een continue functie f heeft in $x = a$ een **buigpunt** indien

- $f''(x)$ in a van teken wisselt
- en de kromme in het punt $(a, f(a))$ de raaklijn snijdt.

Opmerkingen

1. In een buigpunt gaat de kromme over van convex naar concaaf of omgekeerd.
2. Indien er geen unieke raaklijn is in p wordt p niet opgevat als een buigpunt.

Buigpunten

Indien f afleidbaar is in het extremum a (horizontale raaklijn) dan kan het teken van $f''(a)$ gebruikt worden om de aard van het extremum te bepalen:

– als $f''(a) > 0$ dan is de holle zijde naar boven: $\smile$ er is een minimum

– als $f''(a) < 0$ dan is de holle zijde naar onder: $\frown$ er is een maximum

– als $f''(a) = 0$ dan kan geen algemeen besluit getrokken worden

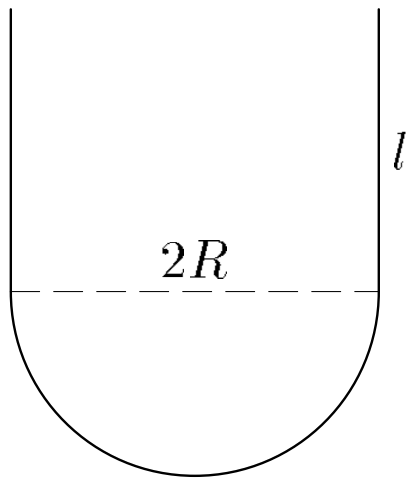
Deze werkwijze vervangt het tekenonderzoek van de eerste afgeleide.

Extremumvraagstukken

Voorbeeld 1

Een stalen plaat met breedte 100 cm wordt tot een U-vormige goot gebogen (halve cirkel met langere benen). Bepaal de afmetingen zo dat het debiet (evenredig met de oppervlakte) maximaal is.

De totale breedte is $100 = 2l + \pi R$ met R de straal van de halve cirkel en l de lengte van één been. De oppervlakte is $\frac{1}{2}\pi R^2 + 2Rl$.



We bepalen het maximum van

$$f(R) = \frac{1}{2}\pi R^2 + R(100 - \pi R) = 100R - \frac{1}{2}\pi R^2$$

Extremumvraagstuk

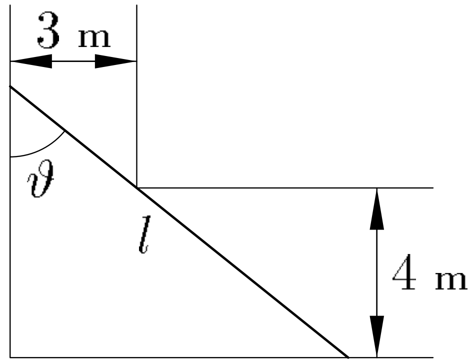
Het tekenonderzoek van $f'(R) = 100 - \pi R$:

R		$\frac{100}{\pi}$	
$f'(R)$	$+$	0	$-$
$f(R)$	$\nearrow$		$\searrow$

Voor $R = \frac{100}{\pi}$ en $l = 0$ is de oppervlakte maximaal en bedraagt zij $\frac{5000}{\pi}\text{cm}^2$.

Extremumvraagstuk

Een gang van $4m$ breed maakt een rechte hoek met een gang van $3m$ breed. Wat is de maximale lengte van een ladder, die horizontaal door deze gang gedragen kan worden?



Afhankelijk van de hoek ϑ (tussen 0 en $\frac{\pi}{2}$) is de doorgangsbreedte

$$l = \frac{4}{\cos\vartheta} + \frac{3}{\sin\vartheta}$$

De afgeleide functie:

$$\frac{dl}{d\vartheta} = \frac{4\sin^3\vartheta - 3\cos^3\vartheta}{\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta} = \begin{array}{lll} \nearrow & 0 & \vartheta = \mathrm{Bgtg}\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \approx 42,3^{\mathrm{o}} \\ \rightarrow & \infty & (\vartheta = 0,\ \frac{\pi}{2}) \\ \searrow & ? & / \end{array}$$

Extremumvraagstuk

ϑ	(0)		$42,3^{\mathrm{O}}$		$(\frac{\pi}{2})$
l'		$-$	0	$+$	
l		$\searrow$	9.87	$\nearrow$	

Voor $\vartheta \approx 42,3^{\mathrm{o}}$ heeft men de kortste doorgang $l = 9.87m$, dit is ook de afmeting van de langste ladder die erdoor kan.

Kromming, kromtestraal

de **kromming** k in een punt p is

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$$

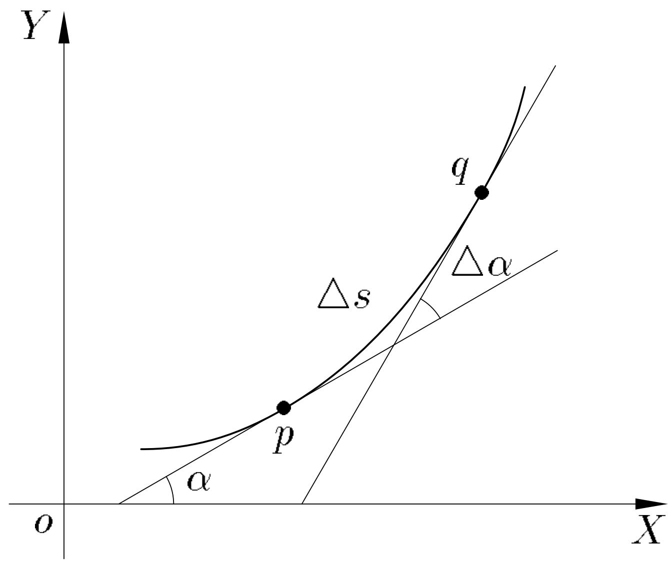
Bij een cirkel met straal R is

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}$$

Naar analogie definiëren we

de **kromtestraal** als

$$R = \frac{1}{|k|} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \left| \frac{\Delta s}{\Delta\alpha} \right| = \left| \frac{ds}{d\alpha} \right|$$



Kromming, kromtestraal

Uit $(\Delta s)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ volgt dat $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$. Vermits $\alpha = \mathrm{Bgtg} y'$ is:

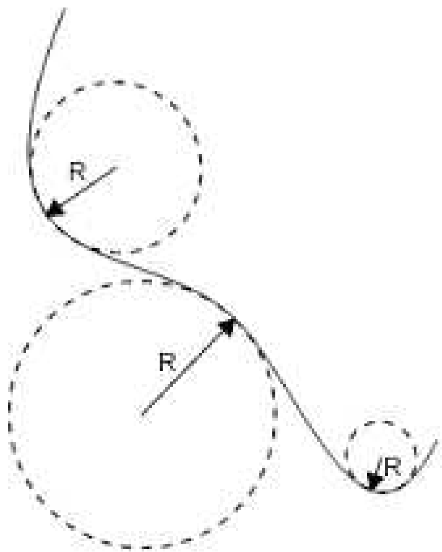
$$k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{y''}{(1+{y'}^2)^{3/2}} \qquad \text{en} \qquad R = \frac{(1+{y'}^2)^{3/2}}{|y''|}$$

Kromtecirkel

De **kromtecirkel** in een punt $p(x_p, y_p)$ van de kromme is de cirkel:

– die raakt aan de kromme in dat punt (zelfde raaklijn)
– en die in dat punt dezelfde kromming heeft.

De straal van de kromtecirkel is dus de kromtestraal.



Kromtemiddelpunt

Het middelpunt van de cirkel is het **kromtemiddelpunt** en ligt op de normaal N in p. De coördinaten van het kromtemiddelpunt $m(\alpha, \beta)$ volgen uit de voorwaarden:

$$m(\alpha,\beta) \in N \quad \Leftrightarrow \quad \beta - y_p = -\frac{1}{y'_p}\,(\alpha - x_p)$$

$$|pm| = R \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha - x_p)^2 + (\beta - y_p)^2 = \frac{\left(1 + {y'_p}^2\right)^3}{(y''_p)^2}$$

$$\alpha - x_p = \pm\frac{\left(1 + {y'_p}^2\right)\cdot y'_p}{y''_p} \quad \text{en} \quad \beta - y_p = \mp\frac{1 + {y'_p}^2}{y''_p}$$

Kromtemiddelpunt, kromtecirkel

Omdat er slechts één kromtemiddelpunt is gaan we na welk teken correct is.

- is $y_p'' > 0$, dan ligt m boven p, dus $\beta > y_p$: $\beta = y_p + \dfrac{1 + {y_p'}^2}{y_p''}$
- is $y_p'' < 0$, dan ligt m onder p, dus $\beta < y_p$: $\beta = y_p + \dfrac{1 + {y_p'}^2}{y_p''}$

Het kromtemiddelpunt is: $$\begin{cases} \alpha = x_p - \dfrac{\left(1 + {y_p'}^2\right) \cdot y_p'}{y_p''} \\[2ex] \beta = y_p + \dfrac{1 + {y_p'}^2}{y_p''} \end{cases}$$

en de kromtecirkel is: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$

Evolute

De **evolute** van een kromme is de verzameling van alle kromtemiddelpunten $m(\alpha, \beta)$ van de kromme.
De parametervergelijking ervan is:

$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{1 + {y'}^2}{y''}\, y' \\[2ex] \beta = y + \dfrac{1 + {y'}^2}{y''} \end{cases}$$

waarin de parameter x is. Eventuele eliminatie van de parameter x geeft de impliciete vergelijking $F(\alpha, \beta) = 0$ van de evolute.