REEKSEN

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \text{oneindige som}$$

$n$de term

keuze kan ook andere startwaarde zijn!

beschouw

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$s_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$$

$\boxed{(s_k)_{k \in \mathbb{N}}}$ rij van de **partieelsommen**

indien $\downarrow$

L (limietwaarde)

dan $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = L}$

reeks convergeert naar L ; anders : divergent

reekssom is L

VB: ① $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$

$= 1 + [(-1)+1] + [(-1)+1] + [(-1)+1] + \cdots = 1$

$= [1 + (-1)] + [1 + (-1)] + [1 + (-1)] + \cdots = 0$

$\neq$

twee verschillende resultaten naargelang manier van samennemen

$\Rightarrow$ DIVERGENT

② $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ harmonische reeks

numerieke evaluatie (rekentoestel of Maple)

$\nearrow$ stijgt zeer traag

$\searrow$ zal toch DIVERGENT zijn

we tonen dit aan door een deelrij te beschouwen van de rij der partieelsommen nl

$\boxed{S_{2^k}}$ (# termen = macht van 2)

$$s_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^k}$$

$$s_{2^1} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$s_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 + \overbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}^{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$s_{2^3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = 1 + \overbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}^{3 \cdot \frac{1}{2}}$$

$\vdots$

$$s_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k}} = 1 + k\frac{1}{2}$$

DUS: $\boxed{s_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}}$ **ONBEGRENSD** (gaat naar $+\infty$) → reeks DIV

③ $\sum_{n=0} c^n = 1 + c + c^2 + \dots$ meetkundige reeks

reden v/d meetkundige reeks

merk op:

$s_k = 1 + c + c^2 + \dots + c^k = \boxed{\dfrac{1-c^{k+1}}{1-c}}$

formule voor de kde partieelsom van een meetkundige reeks.

inderdaad:

$(1-c)(1+c+c^2+\dots+c^k)$

$= 1 + c + c^2 + \dots + c^k - c - c^2 - \dots - c^k - c^{k+1} = 1 - c^{k+1}$

DUS:

$\lim_{k\to+\infty} \dfrac{1-c^{k+1}}{1-c}$ → $\dfrac{1}{1-c}$ als $|c|<1$; DIV als $|c|\geq 1$

Conclusie

$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} c^n = \frac{1}{1-c}}$ voor $|c|<1$

ST: als $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergent

dan $\boxed{a_n \longrightarrow 0 \text{ voor } n \to +\infty}$

nodige voorwaarde voor convergentie

PAS OP:
geen voldoende voorwaarde, zie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

tussendoor:

EIGENSCHAP

als $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ [stijgende rij naar boven begrensd

of [dalende rij naar onder begrensd

dan $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergent

dus ook $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergent

VB : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

beschouw $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stijgende rij
want $s_{k+1} = s_k + \dfrac{1}{(k+1)^2}$

$$\boxed{s_{k+1} > s_k}$$

? naar boven begrensd

$$s_1 = 1$$

$$s_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} < 1 + \overbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$s_7 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49}$$

$$< 1 + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$\vdots$

$$s_{2^k-1} < 1 + \frac{1}{2} + \underset{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\underset{\shortparallel}{\frac{1}{4}}} + \underset{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\underset{\shortparallel}{\frac{1}{8}}} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$< \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Dus $\forall k \in \mathbb{N}$: $\boxed{s_{2^k - 1} < 2}$

BOVENGRENS
(ook voor alle andere partieelsommen)

Conclusie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ convergent !}$$

ST: als
- $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- a_n dalende rij, dwz $a_{n+1} < a_n$
- $a_n \longrightarrow 0$ als $n \longrightarrow +\infty$

dan $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ CONV}} = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots$

WISSELREEKS !

illustratie

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}}$$

CONVERGENT

$\frac{1}{n} > 0 \quad , \forall n$

$\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ voor $n \longrightarrow +\infty$

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$: dalend

inderdaad :

* $s_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) > 0$ ondergrens

én $s_{2n+2} = s_{2n} + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right)$

$\boxed{s_{2n+2} > s_{2n}}$

stijgende rij

(nog) geen conclusie !

* $$s_{2m+1} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{2m+1}\right) < 1$$

bovengrens

én

$$s_{2m+3} = s_{2m+1} - \left(\frac{1}{2m+2} - \frac{1}{2m+3}\right)$$

$$\boxed{s_{2m+3} > s_{2m+1}}$$

dalende rij

even eens geen conclusie !

* SAMEN

$$0 < s_{2m} < s_{2m+1} < 1$$

$s_{2m+1} > 0$: dalende rij met ondergrens $\longrightarrow$ CONV

$s_{2m} < 1$: stijgende rij met bovengrens $\longrightarrow$ CONV

én : $\lim\limits_{m \to +\infty} s_{2m} = \lim\limits_{m \to +\infty} s_{2m+1}$

REEKS CONV