TOEPASSING 1 POSITIEVE MACHTENREEKS (PMR)

$$\sum_{n=0}^{\pm\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \dots$$

pas op!

a_n: gegeven coëff^n

x_0: vast punt

x = variabele

<u>VRAAG</u>: voor welke $x \in \mathbb{R}$ is deze reeks convergent?

noem $\boxed{A_n = a_n (x - x_0)^n}$ = volledige term, dus we bekijken $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n$

d'Alembert II:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1} (x-x_0)^{n+1}}{a_n (x-x_0)^n} \right|$$

$$= \left(\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) |x - x_0| < 1$$

? wanneer is dit zo

$$\Leftrightarrow \quad |x - x_0| < \boxed{\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} = R$$

convergentiestraal

→ gebied van absolute convergentie

CONCLUSIE

PMR

- abs conv $\forall x \in \,]x_0 - R, x_0 + R[$
- div $\forall x \in \,]-\infty, x_0 - R[\, \cup \,]x_0 + R, +\infty[$
- $x = x_0 \pm R$: nog geen conclusie, verder onderzoek nodig

VB ① $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ mtk reeks $1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ reekssomfunctie

$$\left.\begin{array}{l} a_n = 1, \ \forall n \\ x_0 = 0 \end{array}\right\} \quad |x - 0| < \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{1}{1} \right| = \boxed{1 = R}$$

zie vorige les

DUS : ABS CONV $\forall x$ met $|x| < 1$

DIV $\forall x$ met $|x| \geq 1$

VB ② $\sum_{n=0}^{+\infty} n!\, x^n$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ a_n = n! \end{array}\right\} \quad |x-0| < \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \boxed{0 = R}$$

nergens conv! behalve in $x = x_0$

EIGENSCHAPPEN v/d REEKSSOMF^IE

Stel $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ in $]x_0 - R, x_0 + R[$

dan kan men aantonen dat

$$f'(x) = \sum_{n=\cancel{0}\,1}^{+\infty} n\, a_n (x-x_0)^{n-1} \quad \text{in }]x_0 - R, x_0 + R[$$

zelfde gebied

en dus ook

$$f''(x) = \sum_{n=\cancel{1}\,2}^{+\infty} n(n-1)\, a_n (x-x_0)^{n-2} \quad \text{in }]x_0 - R, x_0 + R[$$

etc.

DUS : als f = reeksomfie van PMR dan f is onbeperkt afleidbaar in het bijzonder geldt er :

- $f(x_0) = a_0 + \cancel{a_1(x_0 - x_0)} + \cancel{a_2(x_0 - x_0)^2} + \dots$
  $= a_0$

- $f'(x_0) = a_1 + \cancel{2a_2(x_0 - x_0)} + \cancel{3a_3(x_0 - x_0)^2} + \dots$
  $= a_1$

- $f''(x_0) = 2a_2 + \cancel{6a_3(x_0 - x_0)} + \cancel{12a_4(x_0 - x_0)^2} + \dots$
  $= 2a_2$

- $f'''(x_0) = 6a_3 + \cancel{24a_4(x - x_0)} + \dots$
  $= 6a_3$

etc , $\boxed{\text{ALGEMEEN}}$ $f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}$$

Dus : $\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots}$

TAYLORREEKS van de functie $f(x)$

Vgl. met de formule van Taylor

VB: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \stackrel{\text{stel}}{=} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ a_n = \frac{1}{n!} \end{array}\right\} \Rightarrow |x-0| < \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \boxed{+\infty = R}$$

overal conv!

dan $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \exp(x)}$$

EIG^n

$$\exp(x) \cdot \exp(y)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!}\right) \rightsquigarrow$$

we gaan nu alle termen samennemen waarvan de totale graad in x en y $= n$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \Bigg(\underbrace{\sum_{m=0}^{n}}_{\substack{\text{sommeer} \\ \text{over alle mogelijkheden} \\ y^n,\ x y^{n-1},\ x^2 y^{n-2},\ \dots,\ x^{n-1} y,\ x^n}} \frac{1}{m!} \frac{1}{(n-m)!} \underbrace{x^m y^{n-m}}_{\text{totale graad} = n} \Bigg)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \Bigg(\sum_{m=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{m!\,(n-m)!}}_{= \binom{n}{m}} x^m y^{n-m} \Bigg)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \Bigg(\underbrace{\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m y^{n-m}}_{= (x+y)^n} \Bigg)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

$$= \exp(x+y)$$

BINOMIUM v. NEWTON

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^m b^{n-m}$$

(belangrijke formule)

Verband met cos en sin

$$\exp(ix) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(ix)^m}{m!}$$

opm: we mogen ook complexe waarden invullen in een PMR

$$= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)}_{\cos(x)} + i\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)}_{\sin(x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)}$$

FORMULE van EULER

gevolg : somformules

$$\exp(i\theta)\,\exp(i\alpha) = \exp(i(\theta+\alpha))$$

$$= \boxed{\cos(\theta+\alpha)} + i\,\sin(\theta+\alpha)$$

$$\| $$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$\|$$

$$\boxed{\cos\theta\cos\alpha} + i\,\boxed{\sin\theta\cos\alpha} + i\,\boxed{\cos\theta\sin\alpha}\ \boxed{-\sin\theta\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \cos(\theta+\alpha) &= \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha \\ \sin(\theta+\alpha) &= \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha \end{aligned}}$$

VB 2 $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} c^n = \frac{1}{1-c}$ voor $|c| < 1$

Stel $c = -x^2$ dan $\boxed{\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}}$
$x \in]-1,1[$

primitiveer beide leden:

$$\arctan(x) + C = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

primitiveringscte
bepaal via $\boxed{x=0}$: $\arctan(0) + C = 0$

$\Rightarrow \boxed{C = 0}$

DUS:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad , \forall x \in]-1,1[$$

? $\boxed{x = \pm 1}$ (randpunten)

substitueer in de reeks

$$\pm \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \longrightarrow$$ convergente wisselreeks via Leibniz

? ABS CONV : NEEN

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$$

$$> \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots}_{= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}}$$

DIV MIN !

DUS

betrekkelijk convergent voor $x = \pm 1$

$\boxed{\text{TOEPASSING 2}}$ NEGATIEVE MACHTENREEKS (NMR)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{1}{(x-x_0)^n}$$

pas op !

b_n: gegeven coëff^n

x_0: vast punt

, x = variabele

<u>VRAAG</u> : voor welke $x \in \mathbb{R}$ is deze reeks conv. ?

noem $\boxed{B_n = \dfrac{b_n}{(x-x_0)^n}}$ = volledige term , dus we bekijken $\sum_{n=1}^{+\infty} B_n$

d'Alembert II :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{B_{n+1}}{B_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}} \cdot \frac{(x-x_0)^n}{b_n}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \cdot \frac{1}{|x-x_0|} < 1$$

? wanneer is dit zo

$$\Leftrightarrow \quad |x - x_0| > \boxed{\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = R}$$

convergentiestraal

→ gebied van convergentie

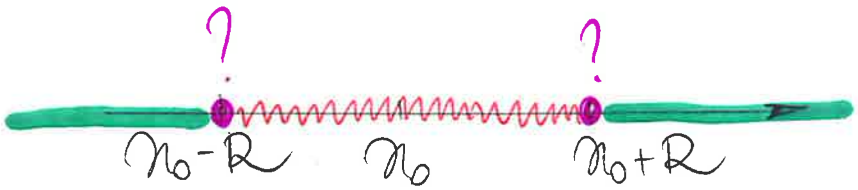
CONCLUSIE

NMR

abs conv $\forall x \in \,]-\infty, x_0 - R[\, \cup \,]x_0 + R, +\infty[$

div $\forall x \in \,]x_0 - R, x_0 + R[$

apart bekijken voor $x_0 \pm R$



opm: stel $f(x) = \sum_{n=1}^{\pm\infty} \frac{b_n}{(x - x_0)^n}$

$f(x)$ ‖ reekssomfie

dan ook hier [$f(x)$ onbeperkt afleidbaar
afgeleiden zijn gelijk aan de termsgewijze afgeleiden v/d reeks.

VB $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$

ABS CONV voor $|x| > 1$

dus $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

én

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n - \underline{1}$$

toegevoegde term terug weghalen

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} - 1 = \frac{1}{x-1}$$

dus

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{voor } x \in]-1, 1[$$

$$\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^n} \quad \text{voor } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$