FACULTEIT INGENIEURSWETENSCHAPPEN
EN ARCHITECTUUR

1

AFGELEIDEN

Wiskunde 1
Opleiding industrieel ingenieur
T. Van Hecke

UNIVERSITEIT
GENT

DEFINITIE AFGELEIDE

Is $a \in \operatorname{dom} f$ en $x \in O_a$:

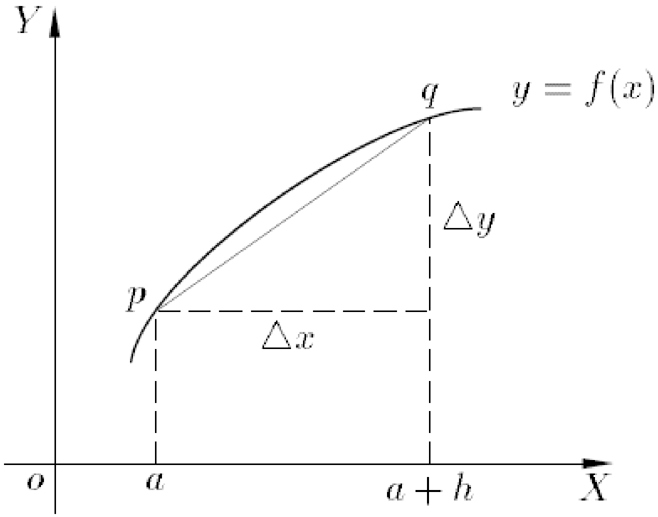
dan is **differentiequotiënt** van f in a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$: de richtingscoëfficiënt van de koorde pq.

Indien $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ bestaat en eindig is, dan zegt men dat f **afleidbaar** is in a en deze waarde noteert men door $f'(a)$ of $Df(a)$.

https://www.geogebra.org/m/tRWkmXwr



DEFINITIE AFGELEIDE

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=Df(x)=f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$$

$$f'_+(a)=\lim_{x\overset{>}{\to} a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad f'_-(a)=\lim_{x\overset{<}{\to} a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Meetkundige betekenis

Zijn $p(a,f(a))$ en $q(a+h,f(a+h))$ punten van de kromme $y=f(x)$

$\Rightarrow \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=$ de **richtingscoëfficiënt** van de rechte pq.

Als $h\to 0$, dan convergeert de rechte pq naar de raaklijn in p.

$\Rightarrow f'(a)=$ de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan $y=f(x)$

. in het punt $(a,\ f(a))$

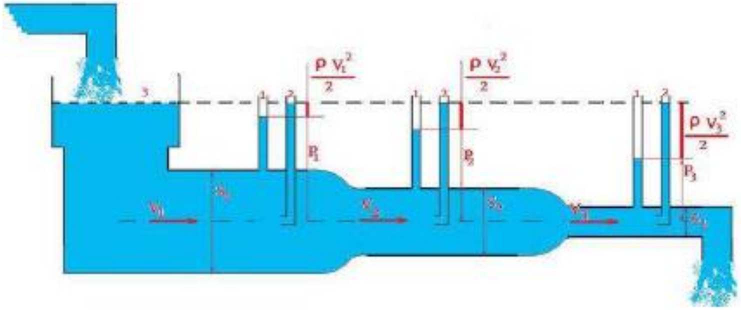
Indien $f'(a)=0$ (resp. ∞) dan is de raaklijn $/\!/$ X-as (resp. $/\!/$ Y-as).

TOEPASSINGEN

snelheid $v = \frac{ds}{dt}$ (s = afgelegde weg)

versnelling $a = \frac{dv}{dt}$

stroomsterkte $i = \frac{dq}{dt}$ (q = lading)



debiet $d = \frac{dV}{dt}$ (V = volume)

VERBAND AFLEIDBAARHEID & CONTINUITEIT

Stelling: f afleidbaar in $a \quad \Rightarrow \quad f$ continu in a

Bewijs

Uit de afleidbaarheid van f in a volgt dat $f'(a) \in \mathbb{R}$ (dus niet ∞). Neemt men in

$$f(a+h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h + f(a)$$

de limiet voor $h \to 0$ dan is $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a)$, wat de continuïteit bevestigt. $\square$

Wat stelt grotere eisen aan een functie: afleidbaarheid of continuïteit?

Tip: bestudeer $y = |x|$ in het punt o.

STELLING VAN FERMAT

Is f afleidbaar in c zo dat

$$\forall x \in O_c \setminus \{c\} : \quad f(x) < f(c) \qquad \text{of} \qquad \forall x \in O_c \setminus \{c\} : f(x) > f(c)$$

dan geldt $f'(c) = 0$.

Bewijs

We bewijzen enkel het eerste geval.

Links van c is:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \quad \text{dus} \quad \lim_{x \overset{<}{\to} c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'_-(c) \geq 0$$

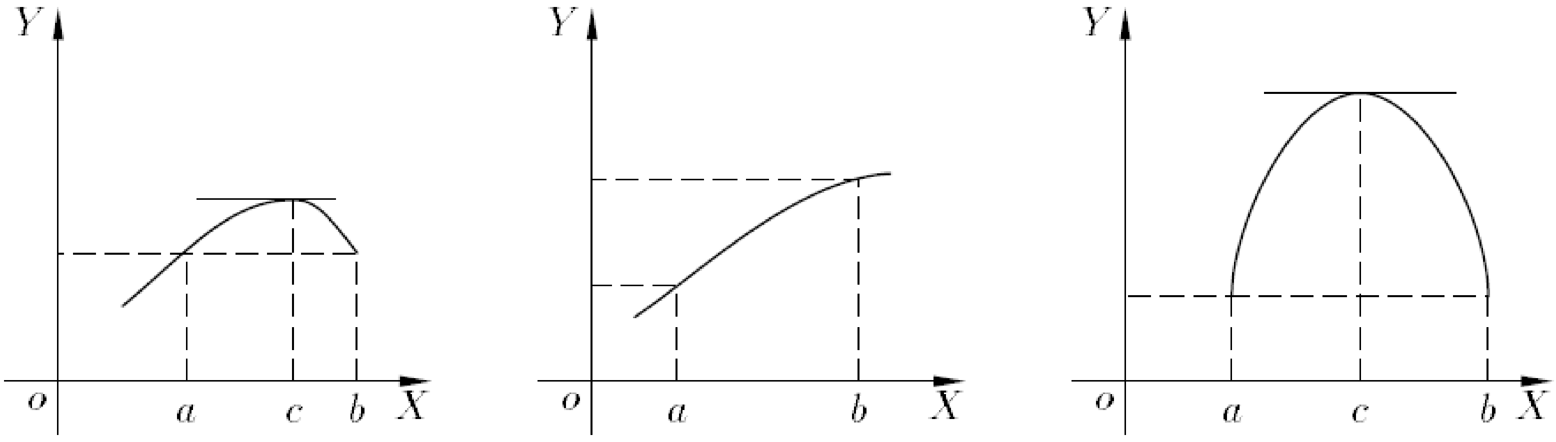
rechts van c is:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0 \quad \text{dus} \quad \lim_{x \overset{>}{\to} c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'_+(c) \leq 0$$

Vermits de functie afleidbaar is in c zijn linker en rechterafgeleide gelijk en geldt $f'(c) = 0$.

STELLING VAN ROLLE

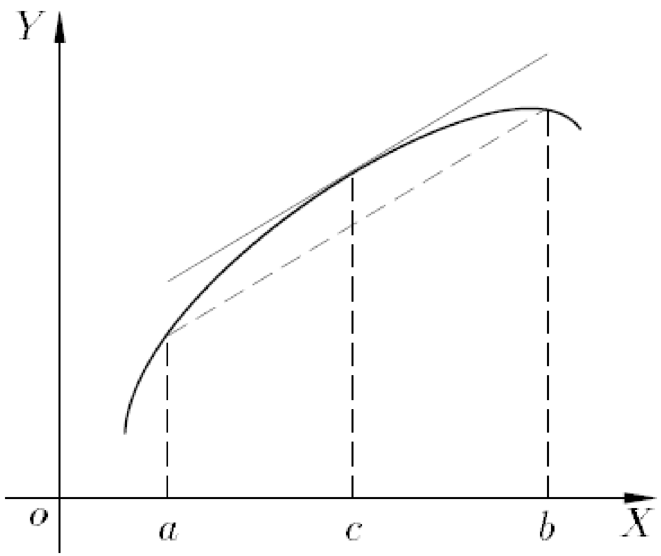
Is f continu over $[a, b]$ en afleidbaar over $]a, b[$ zodat $f(a) = f(b)$ dan $\exists c \in]a, b[$ zodat $f'(c) = 0$.



MIDDELWAARDESTELLING VAN LAGRANGE

Is de functie f continu over $[a,b]$ en afleidbaar over $]a,b[$ dan $\exists c \in]a,b[$ zodat

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$$



Meetkundige betekenis

Er bestaat minstens één punt in $]a,b[$ waar de raaklijn evenwijdig is met de koorde die $(a, f(a))$ met $(b, f(b))$ verbindt.

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x + \vartheta\,\Delta x) \cdot \Delta x$$

met $0 < \vartheta < 1$

REKENREGELS BIJ AFGELEIDEN

Zijn f en g twee afleidbare functies dan geldt, binnen het domein:

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f-g)' = f' - g'$$

$$(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$$

$$(k\,f)' = k\,f', \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2} = (f\,g^{-1})'$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

Indien een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ te schrijven is als $f(t) = u(t) + j\,v(t)$ met u en v twee reële functies, dan geldt $\frac{df}{dt} = \frac{du}{dt} + j\,\frac{dv}{dt}$, m.a.w. $\mathrm{Re}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{du}{dt}$ en $\mathrm{Im}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{dv}{dt}$.

KETTINGREGEL

Kettingregel: Is g afleidbaar in x en f afleidbaar in $y = g(x)$ dan is $z = f \circ g$ afleidbaar in x en geldt:

$$\frac{d(f \circ g)(x)}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{dg(x)}{dx} \quad \text{of} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

AFGELEIDE VAN INVERSE FUNCTIE

Is f afleidbaar in a en $f'(a) \neq 0$, dan is f^{inv} afleidbaar in $b = f(a)$ en geldt:

$$(f^{inv})'(b) = \frac{df^{inv}(b)}{dy} = \frac{1}{f'(a)}$$

AFGELEIDE VAN ELEMENTAIRE FUNCTIES

$\forall k \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$:

$$(k)' = 0$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\mathrm{Bgsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\mathrm{Bgcotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\mathrm{sh} x)' = \mathrm{ch} x$$

$$(\mathrm{th} x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$$

$$(x^k)' = k\, x^{k-1} \qquad k \neq 0$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\mathrm{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$(\mathrm{Bgcos} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\mathrm{Bgtg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(a^x)' = (\ln a)\, a^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(\ln a)\, x}$$

$$(\mathrm{ch} x)' = \mathrm{sh} x$$

$$(\coth x)' = \frac{-1}{\mathrm{sh}^2 x}$$

BEREKENEN VAN DE AFGELEIDE

$$\text{Bereken } y' \text{als } y = \operatorname{Bgtg} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

HOGERE ORDE AFGELEIDE

Is f een functie waarvan de eerste orde afgeleide ($f' = Df = \frac{df}{dx}$) afleidbaar is in een omgeving O dan:

$$\forall x \in O : \qquad f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = D^2 f(x) = \frac{d(f'(x))}{dx}$$

Dit noemt men de 2de orde afgeleide.

Voorbeeld 1

$$D^2 \sin^2 x = D(D \sin^2 x) = D(\sin 2x) = 2 \cos 2x$$

Uitbreiding naar $n$de orde ($n > 1$)

$$D^n f = D(D^{n-1} f) \quad \text{of} \quad \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) = f^{(n)}(x)$$

BEREKENEN VAN DE AFGELEIDE

Bereken $y^{(n)}$ als $y = \frac{1}{x}$ met $n \in \mathbb{N}$.

Waarom is $(\text{Bgtg}\, x)' = \frac{1}{x^2+1}$ als je weet dat $(\text{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$?

DIFFERENTIAAL VAN DE EERSTE ORDE

Voor f continu en afleidbaar in een omgeving van x noemen we de **differentiaal** van f in x:

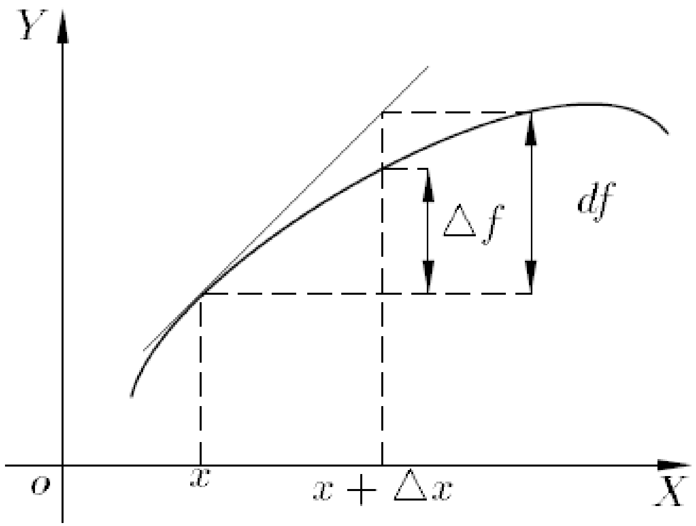
$$df(x) = f'(x) \cdot dx$$

De rekenregels zijn dezelfde als die van de afgeleiden.

Meetkundige betekenis differentiaal van eerste orde:
Indien Δx voldoende klein is:

$$df \approx \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

De aangroei Δf benaderen door df is de aangroei meten tot op de raaklijn i.p.v. op de kromme.



LINEAIRE BENADERING

Geef een lineaire benadering voor $\sqrt{26}$ met eenvoudig rekenwerk.

$\sqrt{26}$=5,099019

DIFFERENTIAAL VAN HOGERE ORDE

Bij constante dx kan men de differentiaal van de tweede orde berekenen:

$$d^2f = d(df) = d(f'(x)\,dx) = df'(x)\cdot dx + f'(x)\cdot d(dx) = f''(x)\cdot dx\cdot dx$$

en we noteren: $\quad d^2f = f''(x)\,(dx)^2.$

Deze uitdrukking geeft de verklaring voor de notatie van de tweede afgeleide $f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}$.

Algemeen, voor $n > 1$: $\quad d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x)) = f^{(n)}(x)(dx)^n$