FUNCTIERIJEN en -REEKSEN

<u>inleiding</u> positieve machtenreeksen

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$$

- convergentie via d'Alembert ABS CONV $\boxed{|x-x_0| < R}$ $R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

- ? reekssom FUNCTIE $f(x)$
  - welke?
  - eigenschappen? (cont, afl, ...)

ALGEMEEN

- $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\longrightarrow 0 \quad \forall x \in]-1,1[$$

$$\longrightarrow 1 \quad x = 1$$

$$\longrightarrow \text{Div} \quad \forall x \in]-\infty,-1] \quad \forall x \in]1,+\infty[$$

expliciet

$$|x^n - 0| < \varepsilon \iff |x|^n < \varepsilon$$

$|x| < 1$

$$\iff n \underbrace{\ln|x|}_{<0} < \ln(\varepsilon)$$

$$\iff \boxed{n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln|x|}}$$

afhankelijk van ε en x

DUS : convergentiegedrag verschilt van punt tot punt

benaming

x^n CONT $\xrightarrow[\text{in }]-1,1]]{\text{CONV puntsgewijze}}$ $f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in]-1,1[\\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$ NIET CONT

- $\frac{1}{n} \sin(n(x+1)) \longrightarrow 0 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

explicciet

$\left| \frac{1}{n} \sin(n(x+1)) - 0 \right| < \varepsilon$ zodra $\boxed{n > \frac{1}{\varepsilon}}$

enkel afh van ε
niet van x

<u>DUS</u> : convergentiegedrag is gelijkmatig over gans $\mathbb{R}$

benaming

$$\underset{\text{CONT}}{\frac{1}{n}\sin(n(x+1))} \xrightarrow[\text{CONV}]{} \underset{\text{CONT}}{0}$$

{ uniform
{ gelijkmatig

op $\mathbb{R}$

- $$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^m}\cos(3^m x)$$ < ABS CONV op $\mathbb{R}$
  < uniform

$$\left| \frac{1}{2^m}\cos(3^m x) \right| \leq \frac{1}{2^m}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Dus $\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}}_{\text{meetkundige reeks met rede } \frac{1}{2}}$ = convergente majorante $\downarrow$ $\forall x$

ST: M-test van Weierstrass

* als $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)| \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} M_n}_{\text{conv.}}, \forall x \in A$

* dan $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ ABS CONV $\forall x \in A$
uniform conv op A

Opm: ook geldig voor complexe functies.

merk op:

- $\frac{1}{2^n}\cos(3^n x)$ is afleidbaar $\forall x$

toch
- * reekssomf^ie niet afleidbaar
  nergens
- * afgeleide reeks is overal divergent

ST 1

als f_n continu is in A, $\forall n$

en $f_n \to f$ > limietfunctie

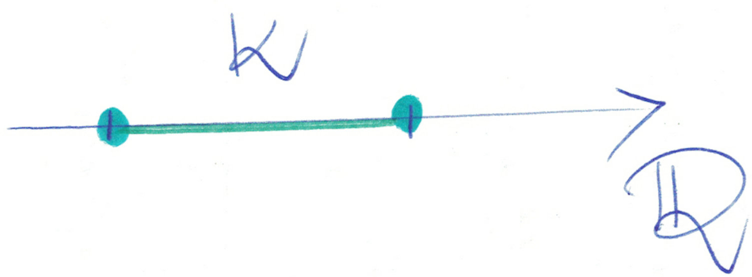
of $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \to f$ > of reekssomfunctie

en de conv is uniform op de compacta van A

dan: f continu op A

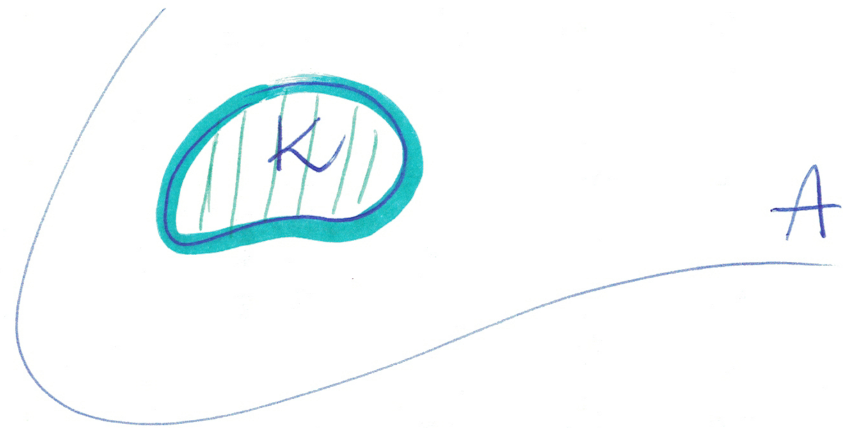
? wat zijn de compacta van A
= compacte deelverzamelingen

in $\mathbb{R}$



K compact
- gesloten (randpt^{n} erbij)
- begrensd (niet naar ∞)

in $\mathbb{C}$



K compact
- gesloten (rand erbij)
- begrensd (niet naar ∞)

ST 2

als f_n afleidbaar is in A, $\forall n$

en $f_n \longrightarrow f$ puntsgewijze $\forall x \in A$

of $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \longrightarrow f$

en bovendien

$f_n' \longrightarrow g$ uniform op de compacta van A

of $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n' \longrightarrow g$

dan f afleidbaar in A

$$\boxed{f' = g}$$