NEGATIEVE MACHTENREEKSEN

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} = \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots$$

$z \in \mathbb{C}$ variabele
$z_0 \in \mathbb{C}$ vast punt
b_n coeff^n $\in \mathbb{C}$

Stel $B_n = \dfrac{b_n}{(z-z_0)^n}$

$B_{n+1} = \dfrac{b_{n+1}}{(z-z_0)^{n+1}}$

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{B_{n+1}}{B_n} \right| \ ?$$

(d'Alembert)

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{B_{n+1}}{B_n} \right|$$

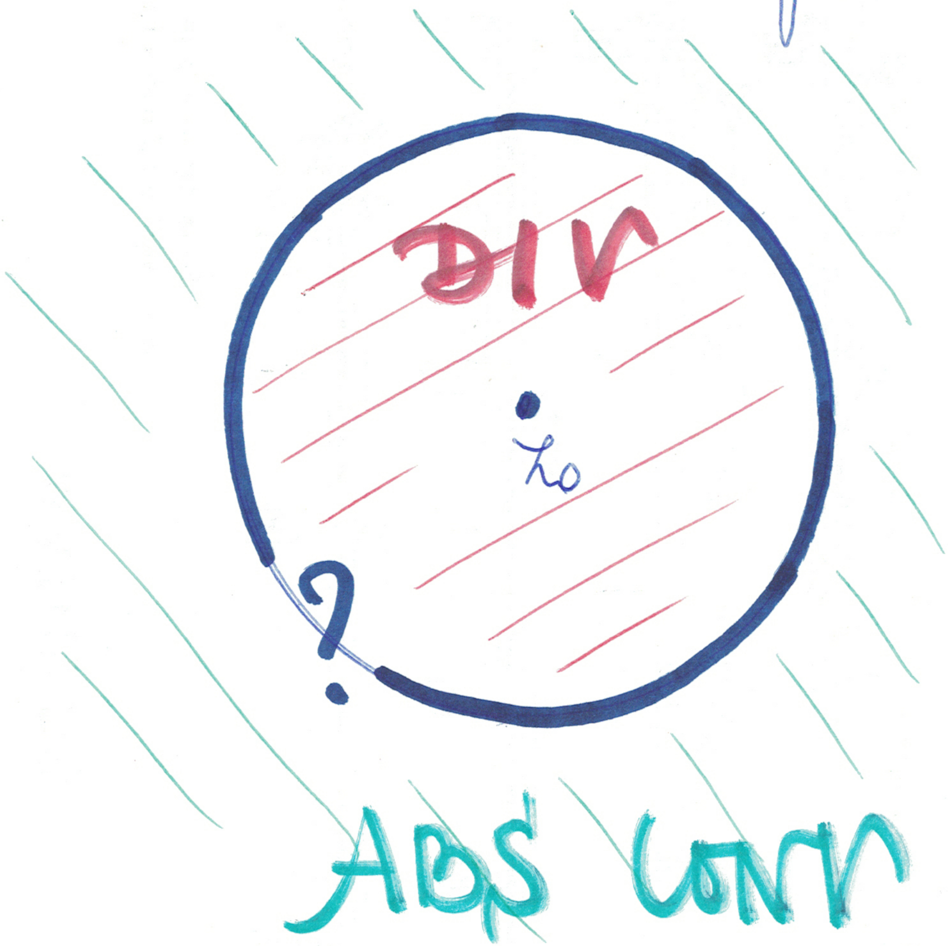
$$= \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{(z-z_0)^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{(z-z_0)^{n}}}{b_n} \right|$$

$$= \frac{1}{|z-z_0|} \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right|}_{\substack{= \\ R \\ \text{convergentiestraal}}} \overset{?}{<} 1$$

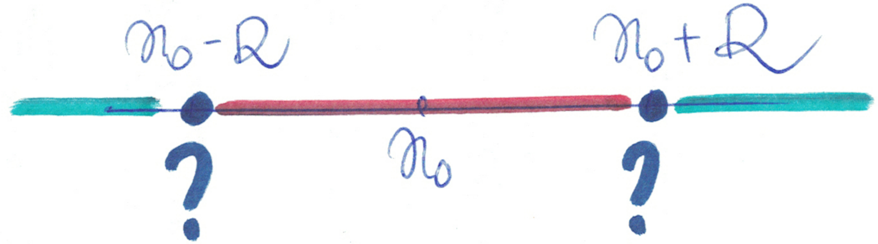
Conclusie

- ABS CONV voor $|z-z_0| > R$
- DIV voor $|z-z_0| < R$
- geen besluit voor $|z-z_0| = R$

visuele voorstelling



of in het reële geval



verder zelfde redenering als bij PMR^n om te komen tot

$$f(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{b_m}{(z-z_0)^m}$$

onbeperkt afl. voor $|z-z_0| > R$

via termsgewijze afl^n

VB

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

ABS convergent voor $|z| > 1$

én

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - 1 = \frac{1}{z-1} \quad \forall |z| > 1$$

eerste term weghalen

VB2

Stel $z_0 \neq 1$
dan

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{1-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{1-z_0}}$$

$$= \frac{1}{1-c}$$

$$= \frac{1}{1-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^n}$$

uit de buurt van $z=1$ blijven!

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}} \qquad \forall z : \underbrace{|z-z_0| < |1-z_0|}$$

maar ook

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{\frac{1-z_0}{z-z_0} - 1} \neq -\frac{1}{1-c}$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} \qquad \forall z : |z-z_0| > \underbrace{|1-z_0|}_{\text{idem!}}$$